E.Ü. MÜH FAKÜLTESİ DERS KİTAPLARI YAYINLARI NO:14

DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE UYGULAMALARI

300 ÇÖZÜMLÜ PROBLEM
400 ALIŞTIRMA PROBLEM
300 ALIŞTIRMA PROBLEM VE CEVAPLARI

Prof. Dr. Mehmet AYDIN
Prof. Dr. Beno KURYEL
Prof. Dr. Gönül GÜNDÜZ
Doç. Dr. Galip ORTURANÇ

13. BASKI
İZMİR 2019
TIPKI BASIM

BARIŞ YAYINLARI
FAKÜLTELER KİTABEVİ

E.Ü. Mühendislik Fakültesi Ders Kitapları Yayınları No: 14

DİFERANSİYEL DENKLEMLER ve UYGULAMALARI

Prof. Dr. Mehmet AYDIN
Ege Üniversitesi Mühendislik Fakültesi

Prof. Dr. Beno KURYEL
E. Ü. Mühendislik Fakültesi

Prof. Dr. Gönül GÜNDÜZ
E. Ü. Mühendislik Fakültesi

Yard. Doç. Dr. Galip OTURANÇ
Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi

İzmir, 2019

DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE UYGULAMALARI
Eylül 2019, İzmir, 13. Baskı
Yayın Hakkı: FAKÜLTELER KİTABEVİ BARIŞ YAYINLARI'na aittir.

© Tüm hakları mahfuzdur. Bu kitabın tamamı yada bir kısmı 5846 sayılı yasanın hükümlerine göre, kitabı yayınlayan yayınevinin önceden izni olmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi yada herhangi bir kayıt sistemi ile çoğaltılamaz, yayınlanamaz, depolanamaz.

BARIŞ YAYINLARI
FAKÜLTELER KİTABEVİ

Hürriyet Cad. No: 203 / A
Gsm: 0.532 363 12 92

Tel: 0.232 339 77 48

Faks: 0.232 339 77 48

e-mail: info@barisyayinlari.com
Bornova/İZMİR

Meta Basım Matbaacılık Hizmetleri
87 Sok. No. 4 / A Bornova, İzmir
☎ (0.232) 343 64 54 ✉ metabasim@gmail.com
İzmir, Eylül - 2019

Dördüncü Baskı İçin ÖNSÖZ

Kitabımızın Dördüncü Baskısı'nın öncekilere kıyasla daha mükemmel olarak gerçekleşmesi için yeni çalışmalar yapılmıştır. Özet olarak, bu çalışmalar şunlardır:

1) Önceki baskılarda gözden kaçmış olan bazı dizgi hataları düzeltilmiştir.

2) Kitabımızın Üçüncü Bölümü, Birinci Mertebe Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları'nı kapsadığı gözönünde tutularak, bu bölümün sonuna, "Elektromagnetik-İndüksiyon Problemleri" başlıklı yeni bir kısım ilave edilmiştir.

3) Öğrencilerimizden gelen yoğun istekler gözönünde tutularak, kitabımızda yer alan çok sayıda ALIŞTIRMA probleminin yanıtları, Yard. Doç. Dr. Galip OTURANÇ tarafından bulunmuş ve kitabımızın sonuna ilave edilmiştir.

Bir ders kitabı ve önemli bir kaynak eser olarak kitabımızın değerli öğrencilerimize ve muhterem öğretim üyelerimize ve tüm okuyucularımıza yararlı olması en içten dileğimizdir.

İzmir - 1999

Mehmet AYDIN

Üçüncü Baskı İçin ÖNSÖZ

"Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları" adlı kitabımız, yeni ilaveler yapılarak, yeni dizgi ve mükemmel bir baskı ile "Üçüncü Baskı"sını gerçekleştirmiştir.

Önceki baskılarda olduğu gibi, bu baskıda da kitabımız, her konu için ayrıntılı şekilde çözülmüş çok sayıda "Örnek Problem" içermektedir. Ayrıca bu baskıda, çok sayıda ALIŞTIRMA probleminin yanıtı verilmiştir. Bir sonraki baskıda Alıştırma problemlerinin tamamının yanıtının verilmesine çalışılacaktır.

Kitabımızın ikinci baskısında, Dokuz Eylül Üniversitesi Öğretim Üyelerinden Doç. Dr. Seçil ERİM tarafından "Mekanik-Mukavemet Problemleri" ve Prof. Dr. Güzin GÖKMEN tarafından Bölüm 11'e, "Laplace Dönüşüm Metodu" gibi kısımlar ilave edildi. Bu baskıda ise, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yard. Doç. Dr. Galip OTURANÇ tarafından kitabımıza, Bölüm 11'de "Birleşik Cisimlerde Sıcaklık Dağılımı", Bölüm 8'e yeni ilaveler, Bölüm 1'e "Varlık ve Teklik Teoremleri" ilavesi ve ayrıca kitabımızın bazı bölümlerinde yer alan ALIŞTIRMA problemlerinin yanıtları ilave edilmiştir. Adı geçen öğretim üyelerimize bu değerli katkılarından dolayı en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, kitabımızın baskısını gerçekleştiren ve pazarlamasını yapan Fakülteler Kitabevi sahibi Necla ERTAN'a ve kitabımızın mükemmel şekilde dizgisini gerçekleştiren DOĞRULUK Matbaacılık Bilgisayar Grafik & Dizgi Servisi'nin değerli operatörlerine teşekkürü bir borç bilirim.

Kitabımızın, değerli öğretim üyelerimiz ve öğrencilerimize yararlı olması en içten dileğimizdir.

İzmir - Eylül 1995 **Mehmet AYDIN**

İkinci Baskı İçin ÖNSÖZ

"Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları" adlı kitabımız, öğretim üyelerimiz ve öğrencilerimiz tarafından çok beğeni kazanmış ve iki yıl içinde "İkinci Baskı"ya geçilmiştir. Kitaptaki konuların anlaşılır şekilde ve tam bir açıklıkla ele alınması, konuların oldukça geniş kapsamlı tutulması, kitabın uygulamaya yönelik yazılmış olması ve her konu için ayrıntılı şekilde çözülmüş çok sayıda "Örnek Problem" içermesi kitabımızın çok tutulmasında etken olmuştur.

Kitabımızın birinci baskısında esas itibariyle Lineer Adi Diferansiyel Denklemler'e ağırlık verilmiş ve Kısmi Diferansiyel Denklemler sadece "Giriş" düzeyinde ele alınmıştır. Bu durum kitapta bir eksiklik yaratmıştır. Diğer taraftan, Kısmi Diferansiyel Denklemler çok geniş bir konudur. Bu denklemler, bilhassa ikinci mertebe Kısmi Diferansiyal Denklemler, fizikte, kimyada, ekonomide ve bütün mühendislik dallarında çok önemli bir yer tutmaktadır. Bu nedenle, kitabımızın ikinci baskısında, daha fazla ayrıntıya kaçmadan, bu konuya biraz daha ağırlık vermenin çok yerinde olacağını düşündük.

Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Matematik Öğretim Üyesi Prof. Dr. Güzin GÖKMEN, kitabın ikinci baskısında, Kısmi Diferansiyel Denklemler konusunu daha ayrıntılı şekilde ele almak ve Bölüm 11'i yeniden düzenlemek ve bazı ilaveler yapmak suretiyle bu eksiğin kapatılmasında önemli katkıda bulunmuşlardır. Kendilerine içtenlikle teşekkür ederim. Ayrıca Birinci Mertebe Adi Diferansiyel Denklemlerin uygulama alanına giren "Elektrik-Devre Problemleri" ve İkinci Mertebe Adi Diferansiyel Denklemlerin uygulama alanına giren "Mekanik-Mukavement Problemleri" ile Bölüm 10'un sonuna eklenen "Stiff Diferansiyel Denklemler" konusu bu baskıda kitabımıza yapılan önemli ilaveler olmuştur.

Kitabımızın öğretim elemanlarına ve öğrencilerimize yararlı olması en içten dileğimizdir.

İzmir - Mayıs 1990 **Mehmet AYDIN**

ÖNSÖZ

Üniversitelerimizin mühendislik, ziraat mühendisliği, mühendislik mimarlık fakültelerinde, iktisadi-idari bilimler fakültelerinde ve daha birçok fakülte ve yüksekokulda okutulması öngörülen Matematik III dersi, genel olarak "Diferansiyel Denklemler" başlığı altında verilmektedir. Hemen belirtelim ki, bu kadar geniş bir öğrenci kitlesi bu dersi zorunlu ders olarak aldığı halde, henüz ülkemizde bu konudaki kitap ve kaynak gereksinimini karşılayacak yeter sayıda ve düzeyde eser yazılmış değildir.

Diferansiyel denklemler konusunda, değişik seviyelerde yabancı dillerde yazılmış çok sayıda kitap olduğu bir gerçektir. Bunlardan bazılarının adları kitabımızın sonunda "Kaynaklar" başlığı altında verilmiştir. Bu nedenle, burada bizim amacımız orjinal bir eser ortaya koymak değil, batı üniversitelerinde yaygın olarak kullanılan kitaplardaki konuları, sistematik ve kapsamlı bir şekilde ele alıp, derleyip toparlamak ve öğrencilerimize iyi bir düzeyde aktarmaktır.

Kitaptaki konuların anlaşılır şekilde ve tam bir açıklıkla ele alınması, her konuda ayrıntılı şekilde çözülmüş çok sayıda örnek probleme yer verilmesi, kitabın en belirgin özelliğidir. Bir diferansiyel denklemin genel çözümünün bulunması ne kadar önemli ise, "Uygulamalar" konusu da en az onun kadar önemlidir. Bu nedenle, özellikle birinci ve ikinci mertebeden sabit katsayılı adi diferansiyel denklemlerin uygulama alanına giren bazı problemlerin önce birer diferansiyel denklemle ifade edilmesi ve sonra da, problemlerin verilişinde yer alan başlangıç ve sınır şartları da gözönüne alınarak bunların nasıl çözüleceği konusu kitabımızda ayrıntılı şekilde ele alınmış bulunmaktadır. Her konunun sonunda "Alıştırmalar" başlığı altında, konu ile ilgili olarak verilen çok sayıda problemin çözümü ise öğrenciye bırakılmıştır. Bu problemlerin her birinin çözümü için, önceden konunun ve konu ile ilgili örnek problemlerin iyi anlaşılmış olması gerektiğini burada vurgulamak isteriz.

Üniversitelerimizde Diferansiyel Denklemler dersi genellikle bir yarıyıllık ders olarak okutulmaktadır. Kitabımız içerik itibariyle bu ders

için kapsamlı bir ders kitabı niteliğindedir. Ayrıca, Matematik II dersinin sonunda, diferansiyel denklemler "Giriş" niteleğinde ele alındığından bu dersi alan öğrenciler için ve ileri sınıfta bulunan öğrencilerimizin karşılaşacakları pek çok konu için bu kitap iyi bir kaynak eser durumundadır.

ODTÜ Metalurji Mühendisliği Bölümünde ve Ege Üniversitesi Kimya Mühendisliği Bölümünde okuttuğum diferansiyel denklemler dersinin ders notları, uygulama problemleri ve örnek problemler kitabın yazılışında önemli bir kaynak teşkil etmiştir. Kitabımız onbir bölümden oluşmaktadır. Esas olarak kitapta "Lineer Adi Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları" konusu ele alınmıştır. "Kısmi Diferansiyel Denklemler" konusu ise "Giriş" Düzeyinde sunulmuştur.

Halen, Diferansiyel Denklemler dersini, E.Ü. Kimya Mühendisliği Bölümünde okutmakta olan Doç. Dr. Gönül GÜNDÜZ ve Nümerik Analiz dersini okutmakta olan Doç. Dr. Beno KURYEL ayrı ayrı birer bölüm yazmak suretiyle kitabın yazarları arasına girmiş bulunmaktadırlar. Böylece, kitabın daha kapsamlı bir şekilde tamamlanmasını sağlamış bulunan bu çok değerli arkadaşlarıma burada ayrı ayrı ve içtenlikle teşekkür ederim.

Kitabın yazılmasında ve ortaya çıkmasında gösterdikleri tahammül, anlayış, destek ve sevgiden dolayı, özelikle eşim Gülsen'e ve tüm aileme yürekten teşekkür ederim.

İzmir-Mart 1987 Mehmet AYDIN

KİTAPTAKİ KONULARIN YAZARLARA GÖRE DAĞILIMI

1. **Prof Dr. Mehmet AYDIN**

   BÖLÜM 1. Diferansiyel Denklemler ve Çözümleri

   BÖLÜM 2. Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler

   BÖLÜM 3. Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları

   BÖLÜM 4. Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

   BÖLÜM 5. Sabit Katsayılı İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları

   BÖLÜM 6. Lineer Diferansiyel Denklemlerin Kuvvet Serileri Cinsinden Çözümü

   BÖLÜM 7. Lineer - Denklem Sistemleri

   BÖLÜM 9. Sturm-Liouville Sınır-Değer Problemleri ve Fourier Serileri

2. **Prof. Dr. Gönül GÜNDÜZ ve Yard. Doç. Dr. Galip OTURANÇ**

   BÖLÜM 8. Laplace Dönüşümü

3. **Prof. Dr. Beno KURYEL**

   BÖLÜM 10. Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

4. **Prof. Dr. Mehmet AYDIN, Prof. Dr. Güzin GÖKMEN ve Yard. Doç. Dr. Galip OTURANÇ**

   BÖLÜM 11. Kısmi Diferansiyel Denklemler

5. **Yard. Doç. Dr. Galip OTURANÇ**

   Bazı Problemlerin Yanıtları

İÇİNDEKİLER

Dördüncü baskı için ÖNSÖZ iii
Üçüncü baskı için ÖNSÖZ iv
İkinci baskı için ÖNSÖZ v
Birinci baskı için ÖNSÖZ vi
KİTAPTAKİ KONULARIN YAZARLARA GÖRE DAĞILIMI viii

BÖLÜM 1 Diferansiyel Denklemler ve Çözümleri

1–1 Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması 1
1–2 Diferansiyel Denklemlerin Çözümü 3
1–3 Varlık ve Teklik Teoremleri 7
1–4 Keyfi Sabitlerin Elimine Edilmesi 12
ALIŞTIRMALAR 13

BÖLÜM 2 Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler

2–1 Tam Diferansiyel Denklemler 16
2–2 İntegrasyon Çarpanı 23
ALIŞTIRMALAR 30
2–3 Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler 32
2–4 Homogen Diferansiyel Denklemler 34
ALIŞTIRMALAR 40
2–5 Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler 42
2–6 Bernoilli Denklemi 49
ALIŞTIRMALAR 55

BÖLÜM 3 Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları

3–1 Giriş 58
3–2 Dik Yörüngeler 58
ALIŞTIRMALAR 63
3–3 Mekanik Problemleri 64
ALIŞTIRMALAR 71
3–4 Hız Problemleri 74
ALIŞTIRMALAR 82

3–5 Elektrik Devre Problemleri **85**
ALIŞTIRMALAR **89**
3–6 Elektromagnetik – İndüksiyon Problemleri **91**
ALIŞTIRMALAR **96**

BÖLÜM 4 Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

4–1 Giriş **98**
4–2 Lineer Diferansiyel Denklemlerin Temel Teoremi **100**
4–3 Sabit Katsayılı Homogen Lineer Diferansiyel Denklemler **106**
4–4 Sabit Katsayılı Homogen Olmayan
Lineer Diferansiyel Denklemler **112**
A. Belirsiz Katsayılar Metodu **112**
ALIŞTIRMALAR **120**
B. Parametrelerin Değişimi Metodu **122**
ALIŞTIRMALAR **135**
C. Operatör Metodu **137**
ALIŞTIRMALAR **145**
4–5 Cauchy - Euler Denklemi **146**
ALIŞTIRMALAR **152**

BÖLÜM 5 Sabit Katsayılı İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları

5–1 Salınım Hareketi **154**
A. Basit Harmonik Hareket **155**
B. Serbest Sönümlü Titreşim Hareketi **157**
C. Zorlanmış Sönümlü Titreşim Hareketi **161**
ALIŞTIRMALAR **166**
5–2 Elektrik Devre Problemleri **169**
ALIŞTIRMALAR **174**
5–3 Mekanik Mukavemet Problemleri **176**
ALIŞTIRMALAR **180**

BÖLÜM 6 Lineer Diferansiyel Denklemlerin Kuvvet Serileri Cinsinden Çözümü

6–1	Giriş	**182**
6–2	Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı, Yakınsaklık Yarıçapı	**184**
6–3	Kuvvet Serileri Çözüm Metodu	**188**
6–4	Adi Nokta Etrafında Çözüm	**190**
6–5	Tekil Nokta Etrafında Çözüm, Frobenius Metodu	**206**
ALIŞTIRMALAR		**225**
6–6	Bessel Diferansiyel Denklemi ve Çözümü	**229**
	A. Sıfırıncı Mertebeden Bessel Diferansiyel Denklemi	**229**
	B. p 'inci Mertebeden Bessel Diferansiyel Denklemi	**235**
	C. Değişik Mertebelerden Bessel Fonksiyonları Arasındaki Bağıntılar	**241**
6–7	Bessel Denklemine İndirgenebilen Denklemler	**243**
6–8	Legendre Denklemi ve Legendre Polinomları	**245**
ALIŞTIRMALAR		**251**

BÖLÜM 7 Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri

7–1	Lineer Sistem Türleri	**255**
7–2	Sabit Katsayılı Lineer Sistemlerde Operatör Metodu	**257**
ALIŞTIRMALAR		**267**
7–3	Lineer Denklem Sistemlerinin Uygulanmaları	**269**
7–4	Normal Form Lineer Sistemler	**276**
	I. Homogen Lineer Sistemler	**277**
	II. Homogen Olmayan Lineer Sistemler	**278**
7–5	Sabit Katsayılı Homogen Lineer Sistemler	**279**
	A. Karakteristik Kökler Reel ve Birbirinden Farklı	**280**
	B. Karakteristik Kökler Reel ve Birbirine Eşit	**286**
	C. Karakteristik Kökler Eşlenik Sanal	**292**
ALIŞTIRMALAR		**295**
7–6	Vektörler ve Matrisler	**296**
	A. Temel Kavramlar	**296**
	B. Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık	**306**

C. Karakteristik Değerler ve Karakteristik Fonksiyonlar 314
ALIŞTIRMALAR 321
7–7 Birinci Mertebe Lineer Denklem Sistemlerinin Matris Metodu ile Çözümü 324
ALIŞTIRMALAR 345

BÖLÜM 8 Laplace Dönüşümü

8–1 Giriş 347
8–2 Laplace Dönüşümü 347
8–3 Laplace Dönüşümünün Temel Özellikleri 357
8–4 Ters Laplace Dönüşümü 368
8–5 Ters Laplace Dönüşümünün Özellikleri 368
1. Doğrusallık Özelliği 368
8–6 Konvalisyon Özellikleri ve Ters Laplace Dönüşümünün Bulunması 370
8–7 Ters Laplace Dönüşümünün Basit Kesirlere Ayırarak Bulunması 373
8–8 Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklemlerin Laplace Dönüşümü ile Çözümü 380
ALIŞTIRMALAR 386
LAPLACE TRANSFORMASYON TABLOSU 388
FOURIER TRANSFORMASYON TABLOSU 401

BÖLÜM 9 Sturm-Liouville Sınır-Değer Problemleri ve Fourier Serileri

9–1 Giriş 402
9–2 Sturm - Liouville Problemi Karakteristik Değerler, Karakteristik Fonksiyonlar 406
ALIŞTIRMALAR 416
9–3 Ortoğonal Fonksiyonlar 418
9–4 Bir Fonksiyonun Ortanormal Fonksiyonlar Cinsinden Seriye Açılımı 427
9–5 Trigonometrik Fourier Serileri 432
ALIŞTIRMALAR 455

BÖLÜM 10 Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

10–1	Giriş	**458**
10–2	Genel Başlangıç Değer Problemi	**459**
10–3	Euler Yöntemi	**461**
10–3.1	Euler Yönteminde Kesim Hatası	**463**
10–4	Runge-Kutta Yöntemi	**472**
10–4.1	Dördüncü Mertebe Runge-Kutta Yönteminde Kesim Hatası	**474**
10–5	Sınır Değer Problemi	**479**
10–5.1	Matris Yöntemleri	**479**
10–5.2	Atış Yöntemi	**481**
10–6	Sayısal Yöntemlerde Kararlılık	**484**
10–7	Stiff Diferansiyel Denklemler	**485**
10–8	İki Noktalı Kapalı Çözüm Yöntemi	**490**
ALIŞTIRMALAR		**493**

BÖLÜM 11 Kısmi Diferansiyel Denklemler

11–1	Giriş	**496**
11–2	Kısmi Diferansiyel Denklemin Çözümü	**498**
11–3	Değişkenlerine Ayırma Yöntemi	**499**
11–4	Bir Boyutlu Dalga Denklemi	**500**
11–5	İki Boyutlu Dalga Denklemi	**507**
	1. Dikdörtgen Şeklinde Membran	**508**
	2. Dairesel Membran	**509**
11–6	Bir Boyutlu Isı Denklemi	**512**
11–7	İki Boyutlu Isı Denklemi	**517**
11–8	Laplace Dönüşümü Metodu	**519**
11–9	Birleşik Cisimlerde Sıcaklık Dağılımı	**526**
ALIŞTIRMALAR		**530**
ALIŞTIRMA PROBLEMLERİNİN YANITLARI		**533**
KAYNAKLAR		**551**
İNDEKS		**552**

BÖLÜM 1

Diferansiyel Denklemler ve Çözümleri

Mühendislikte, fiziki bilimlerde, sosyal bilimlerde ve daha birçok bilim dalında çok sayıda problemi çözümleyebilmek için önce bu problemleri matematiksel ifadelerle formüle etmek ve sonra da bunlarla ilgili bazı sınır şartlarını, başlangıç şartlarını kullanarak problemlerin çözümlerini oluşturan fonksiyonları bulup ortaya koymak gerekir. Bilinen bir problemi formüle eden bu matematiksel ifadeler bazen aranan fonksiyonun en azından birinci mertebeden veya daha yüksek mertebelerden türevlerini içermektedir. İşte bu çeşit bir matematiksel ifadeye **diferansiyel denklem** denir.

Diferansiyel denklemler, özellikle birinci ve ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler, teorik ve pratik bakımlardan büyük önem taşımakta ve bütün fen ve mühendislik bilim dallarında çok geniş bir uygulama yeri bulmaktadır. Bu kitapta diferansiyel denklemler, çözümleri ve uygulamaları ile birlikte ele alınacaktır.

1-1 DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

Bir diferansiyel denklem,

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

veya daha genel olarak

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \qquad (1)$$

şeklinde yazılır. Bu denklemlerin birincisi birinci mertebeden, ikincisi ise n'inci mer-

tebeden birer diferansiyel denklemdir. Bir diferansiyel denklemin en yüksek dereceden türevi o denklemin **mertebe**'sini belirler.

Diferansiyel denklemler değişik şekillerde sınıflandırılırlar. Örneğin bir diferansiyel denklemde bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişken olmasına karşın eğer yalnız bir bağımsız değişken varsa bu denkleme **adi diferansiyel denklem** denir. Bağımlı değişkenin tek olması halinde genellikle bağımsız değişken x ile ve bağımlı değişken y ile gösterilir. Eğer diferansiyel denklem, bir tek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken cinsinden türevlerini içeriyorsa bu denkleme de **kısmi diferansiyel denklem** denir.

Adi diferansiyel denklemlerde, y'nin x'e göre türevleri değişik şekillerde gösterilir. Örneğin, y'nin x'e göre birinci türevi dy/dx, y' veya $D = d/dx$ operatörü kullanılarak Dy şeklinde, ikinci türevi d^2y/dx^2, y'' veya D^2y, üçüncü türevi y''', d^3y/dx^3 veya D^3y şeklinde gösterilir. Biz bu gösterme şekillerinin hepsini de karışık olarak kullanacağız.

Adi diferansiyel denklemlere birkaç örnek verelim.

$$\frac{dy}{dx} = \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \omega^2 y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + y = x^2 e^x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4y = \frac{1}{2} - e^{2x}$$

Bunlardan birinci ve üçüncü denklem birinci mertebeden, ikincisi ikinci mertebeden ve sonuncusu ise üçüncü mertebeden birer lineer diferansiyel denklemdir.

Kısmi diferansiyel denklemlere de örnek olarak aşağıdaki denklemler gösterilebilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0$$

Yukarıdaki kısmi diferansiyel denklemlerin üçü de ikinci mertebeden lineer denklemlerdir. Bu kitapta genel olarak adi diferansiyel denklemlere yer verilecektir. Kısmi diferansiyel denklemler ise yalnız bir bölümde "Giriş" niteliğinde ele alınacaktır.

Diferansiyel denklemler lineer olup olmadıklarına göre de sınıflandırılırlar. Eğer bir denklem, bağımlı değişken y'nin veya herhangi bir türevinin ikinci veya daha büyük derecelerden kuvvetlerini içeriyorsa veya y ve y'nin türevlerinin çarpımını içeren terimler ihtiva ediyorsa bu denklem lineer değildir. Lineer olmayan diferansiyel denklemlere birkaç örnek aşağıda verilmiştir.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y^2 = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3y\frac{dy}{dx} + y = 0$$

1-2 DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

n 'inci mertebeden bir adi lineer diferansiyel denklem verilmiş olsun. Denklem 1, veya kısaca Denk. 1, böyle bir diferansiyel denklemi göstermektedir. Şimdi amacımız hangi koşullarda bu denklemin bir çözümü olup olmadığını araştırmaktadır.

Herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu fonksiyon, x 'in bir I aralığında tarif edilmiş bir reel fonksiyon olsun ve bütün $x \in I$ değerleri için bu fonksiyonun n 'inci mertebeden ve daha düşük mertebelerden türevleri bulunsun. Eğer, $f(x)$ fonksiyonu Denk. 1'de yerine konulduğunda denklem sağlanıyorsa, veya başka bir deyişle

$$F\left[x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right] = 0 \qquad (2)$$

ise $y = f(x)$ fonksiyonuna (1) numaralı diferansiyel denklemin **çözümü** denir. Örneğin, bütün reel x değerleri için tarif edilmiş olan

$$y = f(x) = x^2 + 2x + 2$$

fonksiyonu, aşağıda verilen

$$\frac{dy}{dx} - y = -x^2$$

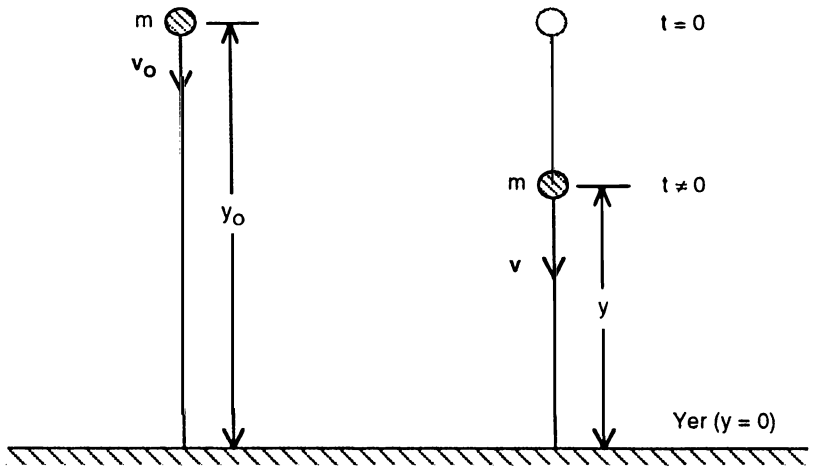
diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Çünkü; denklemde yerine konulduğunda,

$$2x + 2 - (x^2 + 2x + 2) = -x^2$$

olur ve her x değeri için denklem sağlanır.

Genel olarak bir diferansiyel denklem ve varsa sınır şartları veya başlangıç şartları birlikte verilir ve denklemin çözümü istenir. Uygulamada ise durum farklıdır. Burada bir fiziki olayla karşı karşıya bulunulur ve ilk adım olarak bu olaya uyan diferansiyel denklemi belirlemek gerekir. Sonra sınır şartlarına veya başlangıç şartlarına uygun olarak denklem çözümlenir. Örnek olarak, belli bir yükseklikten bilinen bir ilk hızla aşağıya doğru fırlatılan bir cismin hareketi problemini ele alalım.

Bilindiği üzere, Newton'un ikinci hareket kanunu ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemle ifade edilmektedir. Şekil 1 'de görüldüğü gibi, yerden y_o yüksekliğinde bir noktadan v_o ilk hızı ile aşağıya doğru fırlatılan bir cismin, herhangi bir t anında, başlangıç noktasından itibaren hangi uzaklıkta olduğunu veren ifade, yukarıda adı geçen diferansiyel denklemin başlangıç şartlarına uyan çözümünü veren bir $y(t)$ fonksiyonundan başka birşey değildir. Hava direncinin ihmal edilmesi durumunda, düşen cisme etki eden sabit kuvvet, cismin ağırlığına eşit yerçekim kuvvetidir. Cismin kütlesi m ve yerçekim ivmesi g ile gösterildiğinde bu kuvvet mg olur. Hava direncinin ihmal edilmemesi halinde ise durum farklıdır ve ileride, ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin uygulamaları gözönüne alındığında, bir örnek problem olarak tekrar ele alınacaktır.



Şekil 1

Yukarı doğru yönelmiş olan vektörel büyüklükleri pozitif ve aşağı doğru yönelmiş olan vektörel büyüklükleri de negatif kabul edersek, Newton'un ikinci hareket kanununun matematiksel ifadesi,

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \tag{3}$$

veya

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \tag{4}$$

şeklinde yazılır. Bu denklem, ikinci mertebeden sabit katsayılı ve homogen bir diferansiyel denklemdir. Yukarıda belirtilmiş olduğu gibi amacımız, herhangi bir t anında cismin bulunduğu yeri veya yerden hangi yükseklikte olduğunu bulmaktır. Bunun anlamı, problemin ifadesinde verilmiş bulunan başlangıç şartlarını da gözönünde tutarak (4) numaralı diferansiyel denklemi çözmek ve t'nin fonksiyonu olarak y'yi bulmaktır.

Bunu yapmak için önce Denk. 4 'ün her iki tarafının integrali alınırsa,

$$v = \frac{dy}{dt} = -gt + c_1 \tag{5}$$

elde edilir. Bu son denklemin tekrar integrali alındığında,

$$y = -\frac{1}{2} gt^2 + c_1t + c_2 \tag{6}$$

bulunur. Burada, c_1 ve c_2 keyfi integrasyon sabitleridir.

Diferansiyel denklemlerin çözümünde bu integrasyon sabitleri üzerinde önemle durmak gerekmektedir. Burada görüldüğü gibi, ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemin çözümü iki keyfi sabit içermektedir. Genel olarak ifade edilmek istenirse, bir diferansiyel denklemin çözümü, denklemin mertebesine eşit sayıda keyfi sabit içerir.

Yukarıda adı geçen cismin hareketini tam olarak belirleyebilmek için, başlangıç şartlarına bağlı olarak, Denk. 6 'da görülen sabitlerin sayısal değerlerinin bulunması gerekmektedir. Problemin ifadesine bakarak, başlangıç şartları hemen aşağıdaki gibi yazılabilir.

(i) $t = 0$ anında cisim yerden y_0 yüksekliğinde bulunmaktadır.

Öyle ise $y(0) = y_0$'dır.

(ii) $t = 0$ anında cisim aşağıya doğru bir v_0 ilk hızı ile fırlatılmıştır.

Bunun anlamı, $y'(0) = -v_0$'dır.

Böylece ifade edilen başlangıç şartları kullanılarak, (5) denkleminden $c_1 = -v_0$ ve (6) denkleminden $c_2 = y_0$ bulunur. Bu değerler (6) denkleminde yerine konursa,

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + y_0 \qquad (7)$$

elde edilir. Bu son denklem, cismin serbest düşme hareketini tam olarak belirlemektedir.

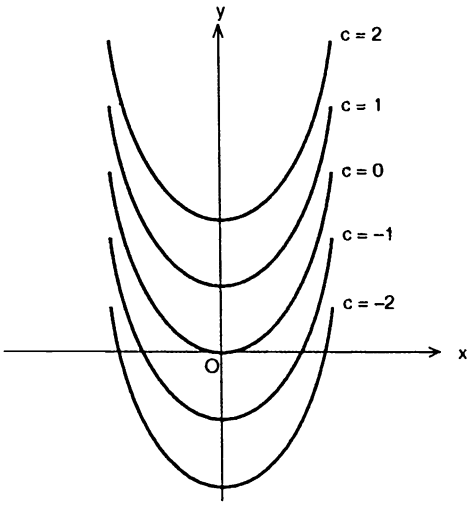
Bir diferansiyel denklemin çözümü ister $y = f(x)$ şeklinde, ister $g(x, y) = 0$ şeklinde bir kapalı fonksiyonla verilsin, bu fonksiyonun grafiğine diferansiyel denklemin **çözüm eğrisi** denir. Örnek olarak,

$$\frac{dy}{dx} = x \qquad (8)$$

diferansiyel denkleminin çözüm eğrisini gözönüne alalım. Her iki tarafın integrali alındığında,

$$y = \frac{1}{2} x^2 + c$$

elde edilir. Burada c, pozitif veya negatif her reel değeri alabilir. Bu demektir ki, bir diferansiyel denklemin çözümü yalnız bir eğri ile değil bir **eğri ailesi** ile temsil edilmektedir. Yukarıdaki örnekte bu eğri ailesi, Şekil 2'de görüldüğü gibi bir parabol ailesinden başka birşey değildir.



Şekil 2

1-3 VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

Önemle işaret edelim ki, her diferansiyel denklemin cebirsel bir fonksiyonla ifade edilebilen bir çözümü yoktur. Ayrıca, denklemin çözümünü bulmak bazen uzun bir uğraşı gerektirir ve sonuç olarak denklemin çözümü bulunamayabilir. Bu nedenle verilen bir diferansiyel denklemin çözümünün var olup olmadığının test edilmesi uygun olur.

Herhangi bir diferansiyel denklemin çözümünün varlık ve tekliğinin incelenmesi "sabit nokta" teoremleri yardımıyla yapılabilir. Bu teoremler hiçbir zaman verilen diferansiyel denklemin çözümü için bir ip ucu vermez, fakat diferansiyel denklemin çözümünün var olup olmadığı hakkında bilgi verir. Sabit nokta teoremi oldukça kullanışlı ve güncel olan bir yöntemdir ve üstelik bu yöntemle sadece diferansiyel değil her türlü denklem incelenebilmektedir. Bu nedenle, bu teoremi ve kullanılmasını vermeden önce bazı önemli tanımları hatırlamak da büyük yarar vardır.

Tanım I: $x = \emptyset$ olmak üzere $d : X \times X \to R$ olan d - fonksiyonunu ele alalım. Şayet d-fonksiyonu aşağıda verilen aksiyomları sağlarsa, (X, d) ikilisine metrik uzay ve $x, y \in X$ olmak üzere, $d(x, y)$'ye x ile y arasındaki uzaklık denir.

i) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$ için

Tanım II: X bir metrik uzay $x_n \in X$, $n \in N$ olsun. k ve l birbirinden bağımsız olarak sonsuza gittiğinde $d(x_k, x_l)$ sıfıra yaklaşıyorsa (x_n) dizisine **"Cauchy Dizisi"** denir.

Tanım III: Bir X metrik uzayında seçilen her Cauchy dizisinin limiti, yine bu uzayın bir noktası ise X'e **tam**'dır denir.

Tanım IV: X bir metrik uzay olsun. Eğer T operatörü aşağıda verilen koşulları sağlarsa bu operatöre **"Daralma Dönüşümü"** denir.

1. $T : X \to X$
2. $\forall x, y \in X$ için $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $d(T[x], T[y]) \leq \alpha\, d(x, y)$

Burada verilen tanıma ek olarak her daralma dönüşümünün sürekli olduğu bilinmelidir.

Sabit Nokta Teoremi: X bir tam metrik uzay ve T , X'den X'e bir daralma dönüşümü ise $Ty = y$ denklemini sağlayan bir tek $x \in M$ noktası vardır.

İspat: $y_0 \in X$ olsun. Burada öncelikle

$y_1 = Ty_0$, $y_2 = Ty_1 = T^2 y_0$ ve genel olarak $y_n = Ty_{n-1} = T^n y_0$ dizisini oluşturalım. Bu dizi üzerinde sabit bir noktanın varlığını ispat etmek için $\{y_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek gereklidir. $m > n$ olmak üzere,

$$d(x_n, y_m) = d\left(T^n[y_0], T^m[y_0]\right) \leq \alpha\, d\left(T^{n-1}[y_0], T^{m-1}[y_0]\right) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\leq \alpha^n d\left(y_0, T^{m-n}[y_0]\right) \leq \alpha^n \{d(y_0, T[y_0]) + d(T[y_0], T^2[y_0])$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + d\left(T^{m-n-1}[y_0], T^{m-n}[y_0]\right)\}$$

ve

$$d\left(T^i[y_0], T^{i+1}[y_0]\right) \leq \alpha^i d(y_0, T[y_0])$$

olduğuna göz önüne alınırsa,

$$d(y_n, y_m) \leq \alpha^n d(y_0, T[y_0]) \{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\}$$

$0 < \alpha < 1$ olduğundan

$$d(y_n, y_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d\left(y_0, T[y_0]\right) \text{ bulunur.}$$

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında $\alpha < 1$ olduğundan n 'nin yeterince büyük değerleri için metriğin değeri istenildiği kadar küçültülebilir. Bu demektir ki, $\{y_n\}$ bir Cauchy dizisidir. X uzayı tam olduğu için bu dizinin X 'de bir limiti vardır.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y^* \in X$$

T dönüşümü sürekli olduğu için

$$T[y^*] = T\left[\lim_{n\to\infty} y_n\right] = \lim_{n\to\infty} T[y_n] = \lim_{n\to\infty} y_{n+1}$$

ve buradan $T[y^*] = y^*$ bulunur. Bu da Cauchy dizisi içinde bir sabit noktanın var olduğu anlamına gelmektedir. Şimdi ise, yukarıda varlığını ispatladığımız sabit noktanın tek olduğunu göstermemiz gereklidir. İspatın bu kısmında, yöntem olarak **"olmayana ergi yöntemi"**ni kullanalım. Kabul edelim ki, önce nokta tek olmasın. y^* ve y^{**} birbirinden farklı sabit iki nokta olsunlar. Bu durumda,

$$T[y^*] = y^*$$

$$T[y^{**}] = y^{**}$$

yazılabilir. Buradan

$$d(y^*, y^{**}) = d\left(T[y^*], T[y^{**}]\right)$$

olduğu açıktır. T bir daralma olduğundan

$$d(y^*, y^{**}) \leq \alpha\, d(y^*, y^{**}),\ 0 < \alpha < 1$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bu eşitlik metrik uzay tanımı gereği olarak $d(y^*, y^{**}) = 0$ hali için geçerlidir. Yine metrik uzay tanımı gereği olarak $d(y^*, y^{**}) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $y^* = y^{**}$ olmasıdır. Bu durum farklı iki y^* ve y^{**} nokta seçimi için çelişkidir. Sonuç olarak y^* ve y^{**} noktaları aynı noktalardır ve sabit nokta tekdir.

Picard Teoremi: Bu teorem genel olarak **"Tek Çözüm Teoremi"** adı ile anılır. $y' = f(x, y)$ diferansiyel denklemindeki f-fonksiyonu

$$D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a \ ,\ |y - y_0| \leq b\}$$

dikdörtgeninde sürekli bir fonksiyon olsun. N bir sabit olmak üzere D bölgesinde

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N\,|y_1 - y_2| \text{ olarak verilen Lipshitz şartını sağlıyorsa,}$$

$M = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|$ ve $h < \min\left(a\ ,\ \frac{b}{M}\ ,\ \frac{1}{N}\right)$ olmak üzere $y' = f(x, y)$ denkleminin $|x - x_0| \leq h$ aralığında $y(x_0) = y_0$ koşuluna uyan bir tek $y = y(x)$ çözümü vardır.

İspat: $|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı, sürekli ve grafiği D içinde kalan y-fonksiyonlarının oluşturduğu tam metrik uzay K olsun. Bu uzayın metriğini

$$d(y, z) = \max_{|x - x_0| \leq h} |y - z| \qquad (9)$$

ile tanımlayalım. Bu metrikle tanımlanan K uzayına **"düzgün yakınsaklık uzayı"** denir. Başlangıç koşulu $y(x_0) = x_0$ olan bir $y' = f(x, y)$ diferansiyel denklemine eşdeğer bir integral denklem

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t\ ,\ y(t)]\, dt \qquad (10)$$

dir. Şimdi Denklem (10) yardımıyla

$$T[y] = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t\ ,\ y(t)]\, dt$$

operatörü tanımlanabilir. Denklem (10) un $y = T[y]$ şeklinde yazılabildiği açıktır. O halde K uzayında varlık ve teklik teoremlerinin kanıtlanabilmesi için T nin bir daralma olduğu gösterilmelidir. Bu operatör $|x - x_0| \leq h$ aralığında sürekli olan ve D bölgesinin dışına çıkmayan her y-fonksiyonuna, aynı aralıkta tanımlı bir $T[y]$ fonksiyonuna karşı gelir. Söz konusu fonksiyonun grafiği

$$|y - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f[t\ ,\ y(t)]\, dt \right| \leq Mh \leq b$$

olur. Dolayısıyla $T[y]$ tümüyle D bölgesinin içinde kalır. Bu durumda T operatörü daralma dönüşümünün ilk koşulunu sağlamaktadır. Koşulun ikinci kısmının gerçekleşebilmesi için,

$$d(T[y], T[z]) \leq \alpha\, d(y, z) \quad , \quad 0 < \alpha < 1$$

sonucu elde edilmelidir. Denklem (9) 'dan

$$d\Big(T[y], T[z]\Big) = \max_{|x-x_0|<h} \left| \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt - \int_{x_0}^{x} f[t, z(t)]\, dt \right|$$

$$= \max_{|x-x_0|<h} \left| \int_{x_0}^{x} |f[t, y(t)] f[t, z(t)]| - dt \right|$$

yazılabilir. Ayrıca, Lispchitz eşitsizliğini de kullanarak

$$d\Big(T[y], T[z]\Big) \leq \max_{|x-x_0|<h} \left| \int_{x_0}^{x} N\, |y(t) - z(t)|\, dt \right|$$

$$\leq N \max_{|x-x_0|<h} \left| \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)|\, dt \right|$$

$$\leq N \max_{|x-x_0|<h} |y(x) - z(x)| \cdot \max_{|x-x_0|<h} \left| \int_{x_0}^{x} dt \right|$$

$$\leq N \max_{|x-x_0|<h} |y(x) - z(x)| \cdot \max_{|x-x_0|<h} |x - x_0|$$

$$\leq N\, h \max_{|x-x_0|<h} |y(x) - z(x)|$$

$$\leq N\, h\, d(y,z) \quad \text{elde edilir.}$$

Buraya kadar elde edilen ifadeler sonucunda $N h \leq \alpha \leq 1$ olduğunu görmek oldukça kolaydır. Bu durumda T dönüşümünün daralma olması için gerekli olan ikinci eşitsizliğin de doğruluğu gösterilmiş oldu. Sonuç olarak sabit nokta teoremi uyarınca T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Yani, (10) denkleminin bir tek sürekli çözümü vardır.

Örnek 1. Aşağıda verilen başlangıç - değer probleminin bir çözümü olup olmadığını gösteriniz.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \qquad y(1) = 2 \tag{11}$$

$$D = \{(x, y) \mid |x-1| \le 2 \ , \ |y-2| \le 3\}$$

olarak seçilsin.

Bu bölgede $f(x, y) = x^2 + y^2$ ile tanımlanan f-fonksiyonu süreklidir. D 'de

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le 4 |y_1 - y_2|$$

Lipschitz koşulunun $N = 4$ olmak üzere sağlandığı açıktır.

$$M = \max_{(x,y) \in D} |f(x,y)| = 5 \text{ dir. O}$$

O halde, (11) denkleminin

$$h < \min\left(2 \ , \frac{3}{5} \ , \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

olmak üzere $|x - 1| \le \frac{1}{4}$ aralığında $y(1) = 2$ koşuluna uyan bir tek çözümü vardır.

Örnek 2. $\frac{dy}{dx} = x^2 \cos y \ , \ y(1) = 2$ (12)

Başlangıç değer probleminin bir çözümü olup olmadığını araştırınız. Başlangıç-değer problemine uygulayınız ve problemin $x_o = 1$ etrafında verilen çok küçük bir $|x - 1| \le h$ aralığında tarif edilmiş olan tek çözümü olduğunu gösteriniz.

Tek çözüm için gerekli şart, xy - düzlemi içinde bulunan bazı D domenleri içinde $f(x, y) = x^2 \cos y$ fonksiyonunun (x, y) nin bir sürekli fonksiyonu olması ve ayrıca $\partial f/\partial y = -x^2 \sin y$ fonksiyonunun da aynı domenler içinde gene (x, y) nin bir sürekli fonksiyonu olmasıdır. Problemde, bu şartlar gerçekleşmektedir. Bu nedenle, xy-düzlemi içinde her yerde her iki fonksiyon da süreklidir. $(x_O, y_O) = (1, 2)$ değerleri de, sözü edilen bir şartsız domen içinde yer almaktadır. Öyle ise, h verilen herhangi çok küçük bir sayı olmak üzere, $|x - 1| \le h$ aralığında tarif edilmiş ve problemin tek çözümü olan bir fonksiyon vardır.

1-4 KEYFİ SABİTLERİN ELİMİNE EDİLMESİ

Birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklem $f(x, y, y') = 0$ ve çözümü $g(x, y, c) = 0$ olsun. Burada c, sıfır dahil, pozitif ve negatif her reel değeri alabilir.

Bir diferansiyel denklemin çözümünün bulunması işleminin tersi olan işlem, keyfi sabitler içeren bir fonksiyon verildiğinde, bu sabitleri elimine ederek verilen fonksiyonu çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulmaktır. Aslında, bir diferansiyel denklemin çözümü bulunduktan sonra, çözümün doğru olup olmadığını anlamak için daima bu işleme başvurulur.

Örnek 1. $y = (c + \sin x)^2$ (13)

fonksiyonunda c sabitini elimine ediniz ve bu fonksiyonu çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulunuz.

Verilen fonksiyonunun x'e göre türevi alınırsa,

$$\frac{dy}{dx} = 2(c + \sin x)\cos x \tag{14}$$

elde edilir. (13) ve (14) denklemlerinden c yok edilirse,

$$(y')^2 - 4y\cos^2 x = 0 \tag{15}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem, birinci mertebeden ve lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir.

Örnek 2. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$ (16)

fonksiyonunda c_1 ve c_2 sabitlerini elimine ediniz.

Burada iki sabit olduğundan, verilen fonksiyonun bu defa iki kez türevi alınırsa,

$$y' = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x} \tag{17}$$

$$y'' = 4c_1 e^{2x} - 9c_2 e^{-3x} \tag{18}$$

bulunur. (17) ve (18) denklemleri arasında c_2 elimine edilirse,

$$y' + 3y = 5c_1 e^{2x} \tag{19}$$

denklemi ve (16) ve (18) denklemleri kullanılarak c_2 elimine edilirse,

$$y'' - 9y = -5c_1 e^{2x} \tag{20}$$

denklemi elde edilir. Son olarak, (19) ve (20) denklemleri arasında c_1 elimine edile-

rek,

$$y'' + y' - 6y = 0 \tag{21}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Örnek 3. $(x + c)^2 + y^2 = c^2$ (22)

denkleminde c sabitini elimine ediniz.

Burada verilen fonksiyon, $g(x, y, c) = 0$ şeklinde bir fonksiyondur. Fonksiyonun doğrudan türevi alındığında,

$$2(x + c) + 2y y' = 0 \tag{23}$$

elde edilir. Buradan $c = -(y y' + x)$ bulunur. c'nin bu değeri Denk. 22 'de yerine konulduğunda,

$$2xy y' - y^2 + x^2 = 0 \tag{24}$$

elde edilir. Bu denklem, (22) fonksiyonunu çözüm kabul eden diferansiyel denklemdir.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin herbirinde denklemin mertebesini ve lineer olup olmadığını belirleyiniz.

a. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x \dfrac{dy}{dx} + 2y = \cos x$

b. $\left(1 + y^2\right) \dfrac{d^2y}{dx^2} + x \dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}$

c. $\dfrac{dy}{dx} + x^2 y = x e^x$

d. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y \sin x = 0$

e. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x \sin y = 0$

f. $x^2 dy - y^2 dx = 0$

g. $\left(\frac{dr}{ds}\right)^3 = \left(\frac{d^2r}{ds^2} + 1\right)^{1/2}$

h. $\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$

ı. $\frac{d^2y}{dx^2} + \sin(x+y) = \sin x$

2. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin karşısındaki diferansiyel denklemin çözümü olduğunu gösteriniz.

a.	$y = x + 3e^{-x}$	$y' + y = x + 1$
b.	$y = (c^2 - x^2)^{1/2}$	$yy' + x = 0$
c.	$y = x^2 + c$	$y' - 2x = 0$
d.	$xy - c = 0$	$y'x + y = 0$
e.	$x^3 + 3xy^2 = 1$	$2xyy' + y^2 + x^2 = 0$
f.	$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$	$y'' + y = 0$
g.	$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$	$y'' - 4y = 0$
h.	$y = (x^3 + c)e^{-3x}$	$y' + 3y = 3x^2 e^{-3x}$
ı.	$y = c_1 \sin(2x + c_2)$	$y'' + 4y = 0$
j.	$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-2x}$	$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$
k.	$y = B \sin(\omega t + \alpha)$	$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$

3. Aşağıdaki fonksiyonların herbirinde keyfi sabitleri elimine ediniz.

a. $x^3 - 3x^2 y = c$

b. $x^2 y = cx + 1$

c. $y = c_1 x + c_2 e^{-x}$

d. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

e. $y^2 = 4cx$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 12y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümünün $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x}$ olduğu bilindiğine göre,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 12y = 0 \ , \ y(0) = 1$$
$$y'(0) = 2$$

başlangıç - değer problemini çözünüz.

5. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ denkleminin çözümünün $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ olduğu bilindiğine göre,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \ , \ y(0) = 1$$
$$y'(\pi/2) = -1$$

başlangıç - değer problemini çözünüz.

BÖLÜM 2

Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde birinci mertebeden adi lineer diferansiyel denklemlerin bazı elementer metodlar yardımıyla çözümü incelenecektir. Bu metodlar birer birer aşağıda ele alınmış bulunmaktadır.

Birinci mertebeden bir adi lineer diferansiyel denklemin,

$$G(x, y, y') = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

şeklinde tarif edildiğini biliyoruz. Burada $f(x, y)$ fonksiyonu, iki değişkenli bilinen bir fonksiyonu göstermektedir. Adi diferansiyel denklemlerin çözümünü veren metodlardan biri kullanılarak bulunacak olan ve diferansiyel denklemi sağlayan herhangi bir $F(x, y) = c$ fonksiyonu, (1) numaralı diferansiyel denklemin **genel çözümü** olacaktır.

Lineer olmayan birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak konumuz dışı olmakla beraber, bu tür bazı denklemlerin belirli koşullar altında ve gerekli değişken değiştirmeler yapılarak nasıl çözümlendiği bu bölümde bazı örneklerle açıklanmaya çalışılacaktır.

2-1 TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Birinci mertebeden bir adi lineer diferansiyel denklem, (1) denklemi şeklinde yazıldığı gibi, çok yaygın olarak

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{2}$$

şeklinde de yazılır. Eğer varsa, bu diferansiyel denklemin çözümü

$$F(x, y) = c \tag{3}$$

şeklinde bir fonksiyon olmak gerekir. Öyle ise, diferansiyel denklemin çözümünü bulmak demek bu fonksiyonu bulmak demektir. Burada $F(x, y)$ genel olarak bir kapalı fonksiyondur.

Bir örnek verilmek istenirse, $F(x, y) = x^2 + 3xy - y^2 = c$ fonksiyonu,

$(2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy = 0$

diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Burada c, sıfır dahil pozitif ve negatif bütün reel değerleri alabilir.

Şimdi (2) denklemine geri dönelim. Çözümü bulmak üzere böyle bir diferansiyel denklem verilmiş olsun. Burada M ve N, x ve y değişkenlerinin verilen fonksiyonları olup, $x - y$ düzlemi içinde bulunan dikdörtgen şeklinde bir D domeni içinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu fonksiyonların birinci mertebeden kısmi türevleri de aynı D domeni içinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda, eğer herhangi bir $F(x, y) = c$ fonksiyonu bulunabilirse, öyle ki, bu fonksiyon aynı domen içinde tarif edilmiş, sürekli ve tek değerli bir fonksiyon olup x ve y'ye göre kısmi türevleri (2) diferansiyel denkleminin $M(x, y)$ ve $N(x, y)$ fonksiyonlarını vermektedir; o zaman, adı geçen (2) numaralı diferansiyel denkleme **tam diferansiyel denklem** denir. Böyle bir denklemde, $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ ifadesi de $F(x, y)$ fonksiyonunun bir **tam diferansiyeli** olur.

Diğer taraftan, bir $F(x, y) = c$ fonksiyonunun tam diferansiyeli, tarif olarak,

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = 0 \tag{4}$$

şeklinde yazıldığından, (2) denklemi bir tam diferansiyel denklemse ve $F(x, y) = c$ bu denklemin aranan genel çözümü ise,

$$M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{ve} \quad N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

yazılır. Burada M'nin y'ye göre ve N'nin de x'e göre tekrar kısmi türevleri alınırsa,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

elde edilir. Bu eşitliklerin sağ tarafları birbirine eşit olduğundan sol tarafları da birbirine eşit olur. O zaman, bir tam diferansiyel denklem için,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{5}$$

olduğu görülür.

Çok açıktır ki, yukarıda bulunan ifadenin tersi de doğrudur. Şu halde, (5) bağıntısı varsa (2) denklemi bir tam diferansiyel denklemdir.

Tam diferansiyel denklemler daima çözülebilir diferansiyel denklemlerdir ve genel çözümleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$F(x, y) = c$ fonksiyonu, (2) numaralı tam diferansiyel denklemin bir genel çözümü olsun. Şimdi, bu fonksiyonun nasıl bulunduğunu görelim.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \tag{6}$$

dir. Her iki tarafın x'e göre kısmi integrali alındığında,

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,\partial x + \phi(y) \tag{7}$$

elde edilir. Burada $\phi(y)$ integrasyon sabitidir ve yalnız y'nin bir fonksiyonudur. Şimdi de (7) bağıntısının y'ye göre kısmi türevi alınırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,\partial x\right] + \frac{d\phi}{dy} \tag{8}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \tag{9}$$

olduğundan, bu değer (8) denkleminde yerine konursa

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,\partial x\right] + \frac{d\phi}{dy} \tag{10}$$

elde edilir. Burada gerekli kısaltmalar yapıldığında,

$$\frac{d\phi}{dy} = \varphi(y) \tag{11}$$

elde edilir. Bu son denklemin y'ye göre normal integrali alınarak $\phi(y)$ fonksiyonu bulunur. $\phi(y)$ nin bu değeri (7) denkleminde yerine konursa, verilen diferansiyel denklemin $F(x, y) = c$ genel çözümü bulunmuş olur.

Örnek 1. $(2x + e^y)\,dx + x\,e^y\,dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz. (12)

Böyle bir denklem verildiğinde önce denklemin bir tam diferansiyel denklem, kısaca "T.D.Denk." olup olmadığına bakılmalıdır.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x + e^y\right) = e^y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x e^y\right) = e^y$$

Görülüyor ki, verilen denklem bir T.D.Denk 'dir ve $F(x, y) = c$ şeklinde bir genel çözümü vardır. Şimdi amacımız bu fonksiyonu bulmaktır.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = 2x + e^y$$

$$F(x, y) = \int \left(2x + e^y\right) \partial x + \phi(y)$$

$$= x^2 + x e^y + \phi(y) \qquad (13)$$

Burada $\phi(y)$ bir nevi integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. Bunun için $F(x, y)$'nin tekrar y'ye göre kısmi türevi alınırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x e^y + \frac{d\phi}{dy}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) = x e^y$$

olduğundan, bu değer yukarıda yerine konursa,

$$x e^y = x e^y + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\frac{d\phi}{dy} = 0$$

ve buradan da $\phi(y) = c_0$ bulunur. ϕ'nin bu değeri (13) denkleminde yerine konursa,

$$F(x, y) = x^2 + x e^y + c_0 = c_1$$

elde edilir. Buradan, (12) numaralı diferansiyel denklemin bir parametreli çözüm ailesi,

$$x^2 + x e^y = c$$

bulunur. Burada $c = c_1 - c_0$ 'dır. c'nin her değeri için diferansiyel denklemin bir özel çözümü bulunmuş olur.

Örnek 2. $3x\,(xy - 2)\,dx + (x^3 + 2y)\,dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$$

olduğundan, verilen diferansiyel denklem bir T.D.Denk.'dir.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x\,(xy - 2)$$

$$F(x, y) = \int 3x\,(xy - 2)\,\partial x + \phi(y)$$

$$= x^3 y - 3x^2 + \phi(y) \qquad (14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^3 y - 3x^2 + \phi(y)\right]$$

$$= x^3 + \frac{d\phi}{dy}$$

Diğer taraftan, $\partial F / \partial y = N(x, y)$ olduğundan

$$x^3 + 2y = x^3 + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\frac{d\phi}{dy} = 2y$$

$$\phi(y) = y^2 + c_0$$

bulunur. ϕ 'nin bu değeri (14) bağıntısında yerine konursa,

$$F(x, y) = x^3 y - 3x^2 + y^2 + c_0 = c_1$$

veya

$$x^3 y - 3x^2 + y^2 = c$$

elde edilir.

Örnek 3. Aşağıdaki başlangıç-değer problemini çözünüz.

$$\left(\frac{3 - y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{y^2 - 2x}{xy^2}\right) dy = 0\,, \qquad y(-1) = 1$$

Önce diferansiyel denklemin genel çözümü bulunur.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan, verilen denklem bir T.D.Denk.'dir. Bu durumda,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{3 - y}{x^2}$$

$$F(x,y) = \int \frac{3 - y}{x^2}\,\partial x + \phi(y) = \frac{y - 3}{x} + \phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x} + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{y^2} = \frac{1}{x} + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\phi(y) = \frac{2}{y} + c_0$$

$$F(x,y) = \frac{y - 3}{x} + \frac{2}{y} + c_0 = c_1$$

$$\frac{y - 3}{x} + \frac{2}{y} = c$$

elde edilir. Bu denklem diferansiyel denklemin genel çözümüdür. Denklemle birlikte verilen başlangıç şartları genel çözümde gözönüne alınırsa,

$$\frac{1 - 3}{-1} + \frac{2}{1} = c \quad \text{ve buradan} \quad c = 4$$

bulunur. c'nin bu değeri yukarıda yerine konulduğunda,

$$2x + y\,(y - 3) + 4\,x\,y = 0$$

elde edilir. Bu son denklem, verilen diferansiyel denklemin, başlangıç şartlarını da sağlayan bir özel çözümdür.

Örnek 4. $(y \cos x + 2\,x\,e^y)\,dx + (\sin x + x^2\,e^y + 2)\,dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2x e^y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan, diferansiyel denklem bir T.D.Denk.'dir.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \cos x + 2x e^y$$

$$F(x,y) = \int \left(y \cos x + 2x e^y\right) \partial x + \phi(y)$$

$$= y \sin x + x^2 e^y + \phi\,(y) \qquad (15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin x + x^2 e^y + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\sin x + x^2 e^y + 2 = \sin x + x^2 e^y + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\frac{d\phi}{dy} = 2$$

$$\phi = 2y + c_0$$

ϕ'nin bu değeri (15) denkleminde yerine konursa,

$$F(x, y) = y \sin x + x^2 e^y + 2y + c_0 = c_1$$

$$y \sin x + x^2 e^y + 2y = c$$

bulunur.

Örnek 5. $(2x^3 + x y^2 + 2y + 3)\,dx + (2x + x^2 y)\,dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Bu denklemde,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy + 2 = \frac{\partial N}{\partial xy}$$

olduğundan diferansiyel denklem bir T.D.Denklemdir. Öyle ise denklemin $F(x, y) = c$ şeklinde bir genel çözümü vardır.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 2y + 3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = N(x, y) = 2x + x^2 y$$

Bu defa ikinci fonksiyonun y'ye göre kısmi integrali alınırsa,

$$F(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y^2 + 2xy + \phi(x) \qquad (16)$$

elde edilir. Şimdi $F(x, y)$'nin x'e göre kısmi türevi alınır ve $\partial F/\partial x$ yerine değeri yazılırsa,

$$xy^2 + 2y + \frac{d}{dx}\phi(x) = 2x^3 + xy^2 + 2y + 3$$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2x^3 + 3$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2} x^4 + 3x + c_0$$

bulunur.

$\phi(x)$ 'in değeri (16) denkleminde yerine konursa, diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + 2xy + \frac{1}{2}x^4 + 3x + c_0 = c_1$$

veya

$$x^4 + x^2y^2 + 4xy + 6x = c$$

elde edilir.

2-2 İNTEGRASYON ÇARPANI

Tam diferansiyel denklemlerin her zaman $F(x, y) = c$ şeklinde bir genel çözümü olduğunu yukarıda gördük. Burada c bir keyfi sabit sayıdır ve genel çözüm, herbiri diferansiyel denklemin bir özel çözümü olan bir fonksiyon ailesini temsil etmektedir.

(2) denklemi bir T.D.Denk. değilse, başka metodlar kullanarak diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmak gerekmektedir. Bu metodlardan biri, eğer varsa, diferansiyel denklemin integrasyon çarpanını bulmaktır.

Tarif olarak, eğer bir $\mu(x, y)$ fonksiyonu bulunabilirse, öyle ki tam diferansiyel olmayan diferansiyel denklemin bütün terimleri bu fonksiyonla çarpıldığında denklem bir T.D.Denk. olmaktadır; o zmana $\mu(x, y)$ fonksiyonuna diferansiyel denklemin **integrasyon çarpanı** denir.

Tam diferansiyel olmayan bir diferansiyel denklem

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{17}$$

olsun. Burada M ve N ayrı ayrı x ve y'nin fonksiyonlarıdır. Bu denklemin integrasyon çarpanı μ ise,

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0 \tag{18}$$

denklemi bir T.D.Denk. olur. bu durumda, (18) denkleminin genel çözümü ile (17) denkleminin genel çözümü aynıdır.

(18) denkleminin bir T.D.Denk. olması için yeterli şart,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \tag{19}$$

olmalıdır. Genel olarak (19) denklemini sağlayan bir $\mu(x, y)$ fonksiyonu bulmak kolay değildir. Bununla beraber, pekçok diferansiyel denklem için geçerli olmak üzere integrasyon çarpanı bazen yalnız x 'in bir fonksiyonu bazen de yalnız y 'nin bir fonksiyonu olabilir. Aşağıda görüleceği gibi bu durumlarda μ 'yü kolayca bulmak mümkün olmaktadır.

Durum I. μ yalnız x'ın fonksiyonu olsun. Bu durumda (19) denklemi,

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{d\mu}{dx}$$

şeklini alır. Buradan,

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx \tag{20}$$

elde edilir. Eğer μ yalnız x'ın bir fonksiyonu ise bunun anlamı, yukarıdaki (20) denkleminde dx'ın katsayısının yalnız x'ın bir fonksiyonu olması gerekir. Bu fonksiyonu $f(x)$ ile gösterirsek,

$$\frac{d\mu}{\mu} = f(x)\,dx \qquad \text{veya} \qquad \ln \mu = \int f(x)\,dx$$

olur. Buradan

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

elde edilir.

Durum II. μ yalnız y'nin fonksiyonu olsun. Bu durumda (19) denklemi,

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{d\mu}{dy} = \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

şeklini alır. Buradan,

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy \tag{21}$$

elde edilir. Eğer (21) denkleminde dy'nin katsayısı yalnız y'nin fonksiyonu ise, örneğin $g(y)$ ise, (21) denklemi kolayca çözülür ve

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy}$$

elde edilir.

Örnek 1. $(x - y)\,dx - dy = 0$ denklemini çözünüz.

Burada $M = x - y$ ve $N = -1$'dir ve denklem bir T.D.Denk. değildir. Bu durumda, eğer varsa, diferansiyel denklemin integrasyon çarpanının bulunması gerekir.

Önce, μ'nün yalnız x'ın bir fonksiyonu olması ihtimalini gözönüne alalım. O zaman,

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{-1}(-1 - 0) = 1$$

bulunur. Görülüyor ki, integrasyon çarpanı yalnız x'ın bir fonksiyonudur.

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx} = e^{\int dx}$$

$$\mu(x) = e^{x}$$

bulunur. Denklemin bütün terimleri integrasyon çarpanı olan e^x fonksiyonu ile çarpılırsa,

$$e^x (x - y)\,dx - e^x\,dy = 0$$

elde edilir. Bu bir T.D.Denk.'dir. Bu denklemin genel çözümü verilen diferansiyel denklemin genel çözümüdür. (Denklemin çözümü bir uygulama olarak okuyucuya bırakılmıştır).

Örnek 2. $y\,dx + (3 + 3x - y)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Bu denklem bir T.D.Denk. değildir. Bu durumda,

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{3 + 3x - y}\,(1 - 3)$$

elde edilir. Görülüyor ki, μ yalnız x'ın bir fonksiyonu değildir. O zaman μ'nün yalnız y'nin bir fonksiyonu olup olmadığına bakılır. Bu durumda,

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{y}\,(3 - 1) = \frac{2}{y}$$

elde edilir. Öyle ise, μ integrasyon çarpanı yalnız y'nin bir fonksiyonudur. Buna göre,

$$\mu(y) = e^{\int g(y)\,dy} = e^{\int \frac{2}{y}\,dy} = e^{\ln y^2}$$

$$\mu(y) = y^2$$

bulunur. Verilen denklemin terimleri y^2 ile çarpılırsa,

$$y^3\,dx + y^2 (3 + 3x - y)\,dy = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem bir T.D. Denk.'dir ve genel çözümü

$$x y^3 + y^3 - \frac{y^4}{4} = c$$

Örnek 3. $[y^2(x+1)+y]\,dx + (2xy+1)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Bu denklem lineer bir diferansiyel denklem değildir ve ayrıca

$$\frac{\partial(2xy+1)}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial\left[y^2(x+1)+y\right]}{\partial y} = 2y\,(x+1)+1$$

olduğuna göre denklem bir T.D.Denk. de değildir. Bu durumda eğer varsa, $\mu(x)$ veya $\mu(y)$ integrasyon çarpanını bulmaya çalışalım.

$M(x,y) = y^2(x+1)+y$ ve $N(x,y) = 2xy+1$

olduğundan,

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{2xy+1}\,(2xy+2y+1-2y) = 1$$

elde edilir. Görülüyor ki bu denklemde μ yalnız x'ın bir fonksiyonudur. O zaman

$$\frac{d\mu}{\mu} = f(x)\,dx$$

$$= dx$$

$$\ln \mu = x \quad \text{ve} \quad \mu = e^x$$

bulunur. Verilen denklem e^x ile çarpıldığında,

$$e^x\left[y^2(x+1)+y\right]dx + e^x(2xy+1)\,dy = 0$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklem lineer değildir. Fakat, burada

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \left[2y\,(x+1)+1\right]e^x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan son denklem bir T.D.Denk.'dir.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x\left[y^2(x+1)+y\right]$$

$$F(x,y) = \int \left[y^2\left(xe^x+e^x\right)+ye^x\right]\partial x + \phi(y)$$

$$= y^2xe^x + ye^x + \phi(y) + c_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

$$2xye^x + e^x + \frac{d\phi}{dy} = e^x(2xy+1)$$

$$\frac{d\phi}{dy} = 0 \quad , \quad \phi(y) = c_0$$

$F(x,y) = y^2xe^x + ye^x = c$ bulunur.

Yukarıdaki hesaplamaları yapmaya gerek kalmaksızın bazen integrasyon faktörü daha kolay şekilde bulunabilir. Bu iş daha çok bir yetenek ve bir deneyim işidir. Böyle durumlarda denklemin terimleri, bulunan bu μ değeri ile çarpılır ve denklem bir T.D.Denk. şekline dönüşür ve kolayca çözümlenir. Aşağıdaki örnekler, bazı diferansiyel denklemlerin bu yöntemle nasıl çözüldüklerini göstermektedir.

Örnek 4. $x\,dy - y\,dx = 0$ denklemini çözünüz.

Bu denklem bir T.D.Denk. değildir. $\mu = 1/x^2$ ile denklemin bütün terimleri çarpılırsa denklem bir T.D.Denk. olur ve kolayca çözülür.

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0 \quad , \quad x = 0$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \text{ ve buradan } y = cx \text{ bulunur.}$$

Yukarıda verilen diferansiyel denklem için, $1/y^2$ ve $1/xy$ fonksiyonları da birer integrasyon çarpanıdır. Bu durumda

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = d\left(-\frac{x}{y}\right) = 0$$

veya

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{xy} = \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

elde edilir. Görülüyor ki, son iki durumda da genel çözüm aynıdır ve $y = cx$'dir.

Örnek 5. $(3x^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Bu diferansiyel denklem bir T.D.Denk. değildir. Denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazılırsa,

$$3x^2\,dx + x\,dy - y\,dx = 0$$

elde edilir. Bu denklemin bütün terimleri $1/x^2$ ile çarpıldığında,

$$3\,dx + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0$$

$$3\,dx + d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

yazılır. Verilen diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$3x + \frac{y}{x} = c \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 6. $y\,dx + (x - y\,x^2)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Bu denklemi aşağıdaki şekilde tekrar yazalım.

$$y\,dx + x\,dy - x^2\,y\,dy = 0$$

$$d(xy) - x^2\,y\,dy = 0$$

olur. Son denklemin terimleri $(xy)^2$ ile bölünürse

$$d(xy)/(xy)^2 - dy/y = 0$$

elde edilir. Her terimin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$-\frac{1}{x\,y} - \ln y = c$$

bulunur.

Örnek 7. $my\,dx + nx\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Bunun için önce aşağıdaki eşitliği gözönüne alalım.

$$d(x^m y^n) = m\,x^{m-1}\,y^n\,dx + n\,y^{n-1}\,x^m\,dy$$

$$= x^{m-1}\,y^{n-1}\,(my\,dx + nx\,dy)$$

Burada açıkça görülüyor ki, verilen diferansiyel denklemin integrasyon çarpanı,

$$\mu(x, y) = x^{m-1}\,y^{n-1}$$

dır. Öyle ise diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$d(x^m y^n) = 0$$

$$x^m y^n = c$$

bulunur.

Örnek 8. $(3\,x^5\,y^5 - 2y)\,dx + (5\,x^6\,y^4 + x)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$x^5\,y^4\,(3y\,dx + 5x\,dy) + (-2y\,dx + x\,dy) = 0$$

Örnek 7'den görüleceği üzere, burada birinci terimin integrasyon çarpanı $x^2\,y^4$ ve ikinci terimin integrasyon çarpanı x^{-3}'dür. Her iki terim x^{-3} ile çarpılırsa bu durum elde edilir ve o zaman verilen diferansiyel denklem bir T.D.Denk. olur.

$$x^2\,y^4\,(3y\,dx + 5x\,dy) + x^{-3}\,y^0\,(-2y\,dx + x\,dy) = 0$$

$$d(x^3\,y^5) + d(x^{-2}\,y) = 0$$

$$x^3\,y^5 + x^{-2}\,y = c$$

bulunur.

Örnek 9. $(x^2 + 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Verilen denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$x^2\,dx + (3y^2\,dx + 2xy\,dy) = 0 \qquad (22)$$

Birinci terim tam diferansiyeldir. İkinci terimin de tam diferansiyel olması için gerekli $\mu(x)$ integrasyon çarpanı aşağıdaki şekilde bulunur.

$$3y^2\mu\,dx + 2xy\mu\,dy = 0$$

Bu denklem bir T.D.Denk. olması için,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(3y^2\mu\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy\mu)$$

$$6y\mu = 2y\left(\mu + x\frac{d\mu}{dy}\right)$$

$$2\mu = x\frac{d\mu}{dy}$$

$$\frac{d\mu}{y} = 2\frac{dx}{x}$$

$$\mu(x) = x^2$$

bulunur. Şimdi (22) denkleminin bütün terimleri $\mu(x) = x^2$ ile çarpılırsa,

$$x^4\,dx + (3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy) = 0$$

$$x^4\,dx + x^2y(3y\,dx + 2x\,dy) = 0$$

$$d\left(\frac{x^5}{5}\right) + d\left(x^3y^2\right) = 0$$

elde edilir. Buna göre, diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$\frac{x^5}{5} + x^3y^2 = c \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 10. $(3y + 8xy^2)\,dx + (2x + 6x^2y)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Bu denklemi iki kısma ayıralım.

$$(3y\,dx + 2x\,dy) + (8xy^2\,dx + 6x^2y\,dy) = 0$$

Örnek 7 yardımıyla, birinci kısmı tam diferansiyel yapacak olan integrasyon çarpanı $\mu = x^2y$ bulunur. Denklemin bütün terimleri bununla çarpılırsa,

$$x^2y(3y\,dx + 2x\,dy) + (8x^3y^3\,dx + 6x^4y^2\,dy) = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$d(x^3y^2) + d(2x^4y^3) = 0$$

$$x^3y^2 + 2x^4y^3 = c \quad \text{bulunur.}$$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri, gerekiyorsa önce $M(x,y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ şekline sokunuz, sonra tam diferansiyel olup olmadığına bakınız ve "tam diferansiyel denklem" olanlarını çözünüz.

   a. $2xyy' = x^2 - y^2$

   b. $2xy\,dx + (x^2 + 4y)\,dy = 0$

   c. $(3x^2 y + 1)\,dx - (x^3 + y^2)\,dy = 0$

   d. $(y^2 + 1)\cos x\,dx + 2y \sin x\,dy = 0$

   e. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax + by}{bx + cy}$

   f. $(e^x \sin y - 2y \sin x)\,dx + (e^x \cos y + 2\cos x)\,dy = 0$

   g. $(x + y)\,dx + (x - y)\,dy = 0$

   h. $(y^2 - 2xy + 6x)\,dx - (x^2 - 2xy + 2)\,dy = 0$

   ı. $y' = \dfrac{3x^2 - 2xy}{x^2 - 2y}$

   j. $(2ye^x - 2x\cos y)\,dx + (e^{2x} - x^2 \sin y)\,dy = 0$

   k. $\sin x \cos y\,dx + \cos x \sin y\,dy = 0$

   l. $(3x^2 e^{2y} + 2x)\,dx - (\sin y - 2x^3 e^{2y})\,dy = 0$

   m. $(y/x + \ln y)\,dx + (x/y + \ln x)\,dy = 0$

   n. $(1 - \ln xy)\,dx + (1 - x/y)\,dy = 0$

   o. $x(\ln y + y)\,dx + y(\ln x + x)\,dy = 0$

   p. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax - by}{bx - cy}$

2. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin tam diferansiyel olabilmeleri için önce A'nın değerini bulunuz, sonra da denklemi çözünüz.

   a. $x(x^2 + 3y^2)\,dx + y(3Ax^2 + y^2)\,dy = 0$

   b. $\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}\right)dx + \left(\dfrac{Ax - 1}{y^3}\right)dy = 0$

3. Aşağıdaki denklemlerin tam diferansiyel olması için $\phi(x, y)$ ne olmalıdır?
   a. $(x^3 - x y^2)\, dx + \phi(x, y)\, dy = 0$
   b. $\phi(x, y)\, dx + (2 x^2 y^3 - x^4 y)\, dy = 0$
   c. $2 x^2 \phi(x, y)\, dx + (x^2 + y^2)\, dy = 0$

4. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin herbirini tam diferansiyel yapabilmek için gerekli integrasyon çarpanını bulunuz ve denklemi çözünüz.
   a. $(y^2 + xy + 1)\, dx + (x^2 + xy + 1)\, dy = 0$
   b. $(3 x^2 + y + 3 x^3 y)\, dx + x\, dy = 0$
   c. $(x^2 - 4y)\, dx - x\, dy = 0$
   d. $(3x + 2 y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$
   e. $y\, dx - (y^3 - 3x)\, dy = 0$
   f. $(2 x^3 - y)\, dx + x\, dy = 0$
   g. $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = -x$

5. $y' = (x + y)^2$ denklemini çözmek için $u = x + y$ değişken değiştirmesini yapınız.

6. $(2 y^2 + 4 x^2 y)\, dx + (4xy + 3 x^3)\, dy = 0$ diferansiyel denkleminin
   $\mu(x, y) = x^a y^b$ şeklinde bir integrasyon çarpanı olduğu biliniyor.
   Adı geçen integrasyon çarpanını bulunuz ve terimlerin herbirini μ ile çarparak denklemi çözünüz.

2-3 DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Eğer bir diferansiyel denklem

$$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0 \tag{23}$$

şekline veya aynı anlama gelen $dy/dx = \varphi(x)/\phi(y)$ şekline sokulabilirse, bu denkleme **değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem** denir. Bu şekle sokulabilen denklemler çözülebilir denklemlerdir. Şimdi,

$$F(x)\,G(y)\,dx + f(x)\,g(y)\,dy = 0 \tag{24}$$

denklemini gözönüne alalım. Böyle bir denklem genel olarak bir T.D.Denk. değildir. Fakat, aşağıda görüldüğü gibi, $\mu(x, y) = 1/f(x)\,G(y)$ bu denklemin bir integrasyon çarpanıdır. (24) denkleminin bütün terimleri bununla çarpılırsa,

$$\frac{F(x)}{f(x)}\,dx + \frac{g(y)}{G(y)}\,dy = 0$$

elde edilir. Burada $F(x)/f(x) = A(x)$ ve $g(y)/G(y) = B(y)$ ile gösterilirse yukarıdaki denklem

$$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0$$

şekline dönüştürülmüş olur. Her terimin ayrı ayrı integrali alınarak bu denklem çözülür.

Örnek 1. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ denklemini çözünüz.

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

$$\int x\,dx + \int y\,dy = c_1$$

$x^2 + y^2 = c$ bulunur.

Örnek 2. $y\,dx - x\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$$

$$\ln x - \ln y = \ln c_0$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln c_0$$

Buradan, denklemin genel çözümü

$y = cx$ bulunur.

Örnek 3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y\left(1 - x^2\right)^{1/2}}$ denklemini çözünüz.

$$y\,dy - \frac{x}{\left(1 - x^2\right)^{1/2}}\,dx = 0$$

Her terimin ayrı ayrı integrali alınırsa,

$$\frac{1}{2}\,y^2 + \left(1 - x^2\right)^{1/2} = c_0$$

$$y^2 + 2\,(1 - x^2)^{1/2} = c \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 4. $x\,(y + 1)^2\,dx + (x^2 + 1)\,ye^y\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$\frac{x}{x^2 + 1}\,dx + \frac{y e^y}{(y + 1)^2}\,dy = 0$$

$$\frac{x}{x^2 + 1}\,dx + d\left(\frac{e^y}{y + 1}\right) = 0$$

$$\ln\left(x^2 + 1\right) + \frac{2e^y}{y + 1} = c \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 5. $(3x + 8)\,(y^2 + 4)\,dx - 4y\,(x^2 + 5x + 6)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$\frac{3x + 8}{x^2 + 5x + 6}\,dx - 2\,\frac{2y}{y^2 + 4}\,dy = 0$$

$$\frac{3x + 8}{(x + 2)\,(x + 3)}\,dx - 2\,\frac{2y}{y^2 + 4}\,dy = 0$$

$$\left(\frac{2}{x + 2} + \frac{1}{x + 3}\right)dx - 2\,\frac{2y}{y^2 + 4}\,dy = 0$$

$$\ln\,(x + 2)^2 + \ln\,(x + 3) - \ln\,(y^2 + 4)^2 = \ln c$$

$$(x + 2)^2\,(x + 3) = c\,(y^2 + 4)^2 \quad \text{bulunur.}$$

2-4 HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Birinci mertebeden bir lineer adi diferansiyel denklemin

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

şeklinde verildiğini biliyoruz. Eğer, y/x veya x/y nin bir g-fonksiyonu bulunabilirse, öyle ki,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = g(y/x) \tag{25}$$

olsun, o zaman $f(x, y)$ fonksiyonuna **homogen fonksiyon** ve yukarıdaki denkleme **homogen diferansiyel denklem** denir. Örnek olarak,

$$(x^2 - 2y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

denklemini gözönüne alalım. Buradan,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - x^2}{2xy} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y/x}$$

bulunur. Görülüyor ki verilen denklem, (25) denklemi şeklinde ifade edilebilmektedir ve bu nedenle bir homogen diferansiyel denklemdir.

Tarif olarak, eğer bir $F(x, y)$ fonksiyonunda x yerine tx ve y yerine ty yazıldığında fonksiyon,

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y)$$

şeklinde yazılabilirse, bu fonksiyona **n'inci dereceden homogen fonksiyon** denir. Örneğin,

$$F(x, y) = x^3 + y^3$$

fonksiyonu 3 'üncü dereceden bir homogen fonksiyondur. Çünkü, bu fonksiyonda x yerine tx ve y yerine ty yazılırsa,

$$\begin{aligned} F(tx, ty) &= (tx)^3 + (ty)^3 \\ &= t^3 (x^3 + y^3) \\ &= t^3 F(x, y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bir homogen diferansiyel denklem, aşağıda görüldüğü şekilde $v = y/x$ değişken değiştirmesi yapılarak değişkenlerine ayrılabilen bir şekle, daha doğrusu bir tam diferansiyel denkleme dönüşür.

Şimdi, yukarıda tarif edilen

$$\frac{dy}{dx} = g\,(y/x)$$

homogen diferansiyel denklemi gözönüne alalım. Burada, $y = vx$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{dy}{dx} = v + x\,\frac{dv}{dx}$$

olur. Yukarıdaki denklemde yerine konursa

$$v + x\,\frac{dv}{dx} = g(v)$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{g(v) - v}$$

bulunur ve bu denklem kolayca çözülür.

Bazı diferansiyel denklemlerin homogen olup olmadığını hemen görmek kolay olmayabilir. Örneğin,

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + by + c}{px + qy + r}\right) \tag{26}$$

denkleminin homogen olup olmadığı ilk bakışta anlaşılamaz. Bunun için

$$x = X + h \quad \text{ve} \quad y = Y + k$$

değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$ax + by + c = aX + bY + ah + bk + c$$

ve

$$px + qy + r = pX + qY + ph + qk + r$$

olur. Buradan h ve k öyle seçilebilir ki,

$$ah + bk + c = 0 \tag{27}$$

$$ph + qk + r = 0$$

olsun. O zaman (26) denklemi,

$$\frac{dY}{dX} = F\left(\frac{aX + bY}{pX + qY}\right)$$

şeklini alır ve görüldüğü gibi bu bir homogen diferansiyel denklemdir.

Şimdi, homogen diferansiyel denklemlerle ilgili olarak aşağıdaki örnekleri gözönüne alalım.

Örnek 1. $(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$y = vx$ alınırsa,

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \frac{1}{v}$$

$$v\,dv - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \ln x = c_0$$

$y^2 = x^2 \ln x^2 + cx^2$ bulunur.

Örnek 2. $(3x^2 - y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y^2}{2xy}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\frac{y}{x}$$

$y = vx$ alınırsa,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3}{2v} - \frac{1}{2}v$$

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{3}{2}v + \frac{3}{2v} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{v} - v\right)$$

$$3\frac{dx}{x} = \frac{2v\,dv}{1 - v^2}$$

$$3\frac{dx}{x} + \frac{2v\,dv}{v^2 - 1} = 0$$

$$\ln x^3 + \ln (v^2 - 1) = \ln c$$

Burada v yerine değeri yazılırsa,

$$\ln x^3 (v^2 - 1) = \ln c$$

$$x^3\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = c$$

$x (y^2 - x^2) = c$ bulunur.

Örnek 3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$ denklemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = v^2 + 2v$$

$$x\frac{dv}{dx} = v^2 + v$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(v+1)}$$

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right)dv$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v+1} - \frac{dv}{v} = 0$$

$$\frac{v+1}{v} = \frac{c_0}{x}$$

bulunur. Burada v yerine değeri konursa,

$$\frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x}} = \frac{c_0}{x}$$

$$\frac{x+y}{y} = \frac{c_0}{x}$$

$$\frac{y}{x+y} = cx$$

elde edilir. Son denklem y'ye göre çözülürse,

$$y = cx^2 + cxy$$

$$y(1 - cx) = cx^2$$

$$y = \frac{cx^2}{1 - cx}$$ olur.

Örnek 4. $(y - x)\,dx + (x + y)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y} = \frac{1 - y/x}{1 + y/x}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-2v-v^2}{1+v}$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1+v)\,dv}{v^2+2v-1} = 0$$

bulunur. v yerine y/x yazılırsa,

$$x^2 - 2xy - y^2 = c$$

elde edilir.

Burada önemle işaret edelim ki, yukarıda verilen denklem herşeyden önce bir T.D.Denk.dir. Bu nedenle, önceki örneklerde olduğu gibi denklem bir T.D.Denk. olarak da çözülse aynı sonuç elde edilir.

Örnek 5. $\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx - x\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + (y/x)^2}$$

Bu defa, $u = x/y$ olsun.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} + \sqrt{1 + 1/u^2} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u}\sqrt{u^2+1} \qquad (28)$$

$$y = \frac{x}{u} \quad \text{olduğundan} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} - \frac{x}{u^2}\frac{du}{dx}$$

olur. Bu değerler (28) denkleminde yerine konursa,

$$\frac{1}{u} - \frac{x}{u^2}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u}\sqrt{u^2+1}$$

$$\frac{du}{u\sqrt{u^2+1}} + \frac{dx}{x} = 0 \qquad (29)$$

bulunur.

İntegral alma tablolarından,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left[\frac{a + \left(x^2+a^2\right)^{1/2}}{x}\right]$$

olduğu bilindiğine göre (burada a = 1), (29) denkleminde her terimin ayrı ayrı integ-

rali alındığında,

$$\ln x - \ln\left[\frac{1+\sqrt{u^2+1}}{u}\right] = \ln c_0$$

$$\frac{1+\sqrt{u^2+1}}{u} = c\,x$$

$$\frac{1}{u} + \sqrt{1+1/u^2} = c\,x$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa,

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+(y/x)^2} = c\,x$$

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = c\,x^2 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 6. $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y+1}\right)^2$ denklemini çözünüz.

Bu denklem, Den. 26 tipi bir diferansiyel denklemdir. Burada,

$a=0$, $b=1$, $c=2$, $p=1$, $q=1$ ve $r=1$

dir. Bu değerler Denk. 27 'de yerlerine konulduğunda,

$$k+2=0$$

$$h+k+1=0$$

elde edilir. Buradan $k=-2$ ve $h=1$ bulunur. Bu durumda,

$$x = X+1$$

$$y = Y-2$$

olur. Bu değerler yerine konulduğunda,

$$\frac{dY}{dX} = 2\,\frac{Y^2}{(X+Y)^2} \tag{30}$$

elde edilir.

Denk. 30 bir homogen diferansiyel denklem olduğundan, $Y = VX$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$V + X\frac{dV}{dX} = \frac{2V^2}{(1+V)^2}$$

$$\left(\frac{1}{V} + \frac{2}{1+V^2}\right)dV + \frac{dX}{X} = 0$$

$$\ln V + 2 \arctan V + \ln X = c$$

$$\ln Y + 2 \arctan Y / X = c$$

elde edilir. Burada Y ve X yerine değerleri yazılırsa,

$$\ln (y+2) + 2 \arctan \frac{y+2}{x-1} = c \text{ bulunur.}$$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri değişkenlerine ayırarak çözünüz.

   a. $y^3\,dx - x^2\,dy = 0$

   b. $(x + y^2 x)\,dx - (y + x^2 y)\,dy = 0$

   c. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$, $y(1) = 2$

   d. $(1+y)\,dx + (1+x)\,dy = 0$

   e. $(y+1)\frac{dy}{dx} = x^2 - x^2\left(y^2 + 2y + 5\right)$

   f. $2x(y^2+1)\,dx + y\,dy = 0$

   g. $\sin x \sin y\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$

   h. $(1 + \ln x)\,dx + (1 + \ln y)\,dy = 0$

   ı. $\tan x\,dx + y\cos^2 x\,dy = 0$

   j. $y' = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2(y+1)}$, $y(0) = 1$

   k. $x y^3\,dx - (1 + x^2)\,dy = 0$, $y(0) = 1$

   l. $2(e^y + 4)\,dx + e^y (x-1)\,dy = 0$

   m. $\tan x \cos y\,dx + \sin y \cos x\,dy = 0$

   n. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

2. Aşağıdaki homogen diferansiyel denklemleri çözünüz.

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x}$

b. $(x^2 + 2xy + y^2)\,dx - x^2\,dy = 0$

c. $\frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x - y}{x + y}$

d. $(x^2 + 3y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0 \quad , \quad y(2) = 6$

e. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$

f. $(3x^2 + 9xy + 5y^2)\,dx - (6x^2 + 4xy)\,dy = 0$

g. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y + 6}{2x + y + 2}$

h. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x + y + 2}{x - y + 1}\right)^2$

ı. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x - y + 1}{3y - x + 5}$

j. $(y + x^2 + y^2)\,dx - x\,dy = 0$

k. $y(3x + 2y)\,dx - x^2\,dy = 0$

l. $\cos y\,dx + x \sin y\,dy = 0$

m. $[x \cos^2 (y / x) - y]\,dx + x\,dy = 0$

n. $x\,dx + e^{(x+y)}\,dy = 0$

o. $(2x + 3y + 1)\,dx + (4x + 6y + 1)\,dy = 0$

p. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x - 3y - 5}{x + y - 1}\right)^2$

2-5 BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler içinde

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x)$$

şeklinde lineer diferansiyel denklemler çok önemli bir yer tutar. x'ın bir I aralığında eğer $a(x) \neq 0$ ise, bu denklemin bütün terimlerini $a(x)$ ile böldüğümüzde,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{31}$$

denklemi elde edilir. Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler daha çok bu şekliyle verilirler. Burada,

$$P(x) = \frac{b(x)}{a(x)} \quad \text{ve} \quad Q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$$

dır. P ve Q fonksiyonları ile denklemin çözümü olan y fonksiyonu aynı aralıkta sürekli fonksiyonlar olduğundan, dy/dx'ın da sürekli olacağı şüphesizdir.

Yukarıda verilen (31) numaralı denklemde eşitliğin sol tarafında kalan kısmını sıfır'a eşitlediğimizde,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{32}$$

denklemini elde ederiz. Bu denkleme, (31) denkleminin **homogen kısmı** denir ve çözümü

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$$

$$y = c\,e^{-\int P(x)\,dx}$$

olur. Görülüyor ki, (32) denkleminin genel çözümü bir c integrasyon sabiti içermektedir.

Burada amacımız, verilen diferansiyel denklemin sadece homogen kısmının çözümünü bulmak değil, tümü ile (31) nolu diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmaktır. Bunun için denklem önce aşağıdaki şekilde yazılır.

$$[P(x)y - Q(x)]\,dx + dy = 0 \tag{33}$$

Bu denklem, $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ denklemi ile karşılaştırılırsa görülür ki,

$$M(x, y) = P(x)y - Q(x) \quad \text{ve} \quad N(x\ y) = 1$$

dır. M ve N fonksiyonlarının bilinen kısmi türevleri alındığında,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

elde edilir. Bu demektir ki, (31) denklemi bir tam diferansiyel denklem değildir.

Daha önce de gördüğümüz gibi, T.D.Denk. olmayan böyle bir denklemi çözmek için bir $\mu(x)$ integrasyon çarpanı bulmak gerekir. Bunun için (33) denkleminin bütün terimleri $\mu(x)$ ile çarpıldığında,

$$[\mu(x) P(x) y - \mu(x) Q(x)]\, dx + \mu(x)\, dy = 0 \qquad (34)$$

elde edilir. Eğer $\mu(x)$ bir integrasyon çarpanı ise (34) denklemi bir tam diferansiyel denklem olmalıdır. O zaman,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\{\mu(x) P(x) y - \mu(x) Q(x)\}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\mu(x)$$

olur. Buradan

$$\mu(x) P(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

ve

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

bulunur. (33) denklemi ile (31) denklemi aynı denklemler olduğundan aslında $\mu(x)$ fonksiyonu (31) denkleminin integrasyon çarpanıdır. Öyle ise,

$$e^{\int P(x)dx}\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y\right] = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

yazılabilir. Bu son denklem önce aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx} y\right] = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

ve sonra da integrali alınırsa,

$$e^{\int P(x)dx} y = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c$$

elde edilir. Burada y yalnız bırakılırsa, diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c\right] \qquad (35)$$

bulunur.

Denk. (35) açıkça göstermektedir ki, genel çözüm iki ayrı terimin toplamı şeklindedir. Bu terimlerden birisi homogen kısmın genel çözümü olup bir c keyfi sabit sayı içermekte, diğeri ise (31) denkleminin bir özel çözümü olduğu için böyle bir sayı içermemektedir.

Örnek 1. $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Verilen denklem, (31) numaralı denklemle karşılaştırılırsa $P(x) = -2x$ ve $Q(x) = x$ olduğu görülür. Bu değerler Denk. 35 'de yerine konulduğunda

$$y = e^{\int 2x\,dx}\left[\int x\, e^{-\int 2x\,dx}\,dx + c\right]$$

elde edilir. Buradan

$$y = e^{x^2}\left[\int x\, e^{-x^2}\,dx + c\right] = e^{x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c\right)$$

$$y = -\frac{1}{2} + c\,e^{x^2}$$

bulunur. Bu son ifade verilen diferansiyel denklemin genel çözümüdür.

Örnek 2. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$, $y(-1) = 3$ başlangıç - değer problemini çözünüz.

Önce denklemin genel çözümü bulunur.

$$e^{\int P(x)dx}\, y = \int Q(x) e^{\int P(x)dx}\,dx + c$$

$$e^{x} y = \int e^{-x} e^{x}\,dx + c$$

$$y = e^{-x}(x + c)$$

Burada, x ve y'nin bilinen değerleri yerlerine konulduğunda,

$$3 = e(-1 + c)$$

$$c = 3e^{-1} + 1$$

elde edilir. c'nin bu değeri genel çözümde yerine konursa,

$y = e^{-x}(1 + 3e^{-1}) + x e^{-x}$ bulunur.

Örnek 3. $y' + (1/x)y = \sin x$ denklemini çözünüz.

$$e^{\int P(x)dx}\, y = \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}\,dx + c$$

$$e^{\int \frac{1}{x}dx}\, y = \int \sin x\, e^{\int \frac{1}{x}dx}\,dx + c$$

$$e^{\ln x} y = \int \sin x \, e^{\ln x} \, dx + c$$

$$xy = \int x \sin x \, dx + c$$

$$xy = \sin x - x \cos x + c$$

$$y = \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{c}{x} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 4. $e^x \left[y - 3(e^x + 1)^2\right] dx + (e^x + 1)\, dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$(e^x + 1)\frac{dy}{dx} + e^x y - 3e^x (e^x + 1)^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{e^x}{e^x + 1} y = \frac{3e^x (e^x + 1)^2}{e^x + 1} = 3e^x (e^x + 1)$$

Görülüyor ki, verilen denklem

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x)$$

şeklinde bir denklemdir. Burada,

$$P(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \text{ve} \quad Q(x) = 3e^x (e^x + 1)$$

dir. Bu değerler Denk. (35)'de yerlerine konursa,

$$(e^x + 1) y = \int (e^x + 1)\, 3e^x (e^x + 1)\, dx + c = 3 \int (e^x + 1)^2 e^x \, dx + c$$

elde edilir. $e^x + 1 = u$ değişken değiştirmesi yapıldığında,

$$(e^x + 1) y = 3 \int u^2 \, du + c = (e^x + 1)^3 + c$$

$$y = (e^x + 1)^2 + c\,(e^x + 1)^{-1} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 5. $y' + (\tan x)\, y = x \sin 2x$ denklemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\sin x}{\cos x} y = x \sin 2x$$

$P(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$ ve $P(x)\,dx = -\ln \cos x$ olduğundan,

$$y\, e^{\int P(x)dx} = \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}\, dx + c$$

$$y\, e^{-\ln \cos x} = \int x \sin 2x \,.\, e^{-\ln \cos x}\, dx + c$$

$$\frac{y}{\cos x} = \int \frac{x \sin 2x}{\cos x}\, dx + c = \int \frac{2x \sin x \cos x}{\cos x}\, dx + c$$

$$= 2(\sin x - x \cos x) + c$$

$y = 2 \cos x (\sin x - x \cos x) + c \cos x$ bulunur.

Örnek 6. $(y + 1)\dfrac{dy}{dx} + x\left(y^2 + 2y\right) = x$ denklemini çözünüz.

$u = y^2 + 2y$ olsun.

$$\frac{du}{dx} = 2(y + 1)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx} + xu = x$$

$$\frac{du}{dx} + 2xu = 2x$$

$$u e^{2\int x\,dx} = 2\int x e^{\int 2x\,dx}\, dx + c$$

$$u e^{x^2} = \int 2x e^{x^2}\, dx + c = e^{x^2} + c$$

$y^2 + 2y = 1 + c e^{-x^2}$ bulunur.

Örnek 7. $y' \cos y + (1/x) \sin y = 2$ denklemini çözünüz.

$u = \sin y$ olsun.

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{x} u = 2$$

$$u\, e^{\int \frac{1}{x}dx} = \int 2e^{\int \frac{1}{x}dx}\, dx + c$$

$$u\, e^{\ln x} = \int 2\, e^{\ln x}\, dx + c$$

$$ux = \int 2x\, dx + c = x^2 + c$$

$x \sin y = x^2 + c$ elde edilir.

Örnek 8. $(y + 1)\frac{dy}{dx} + x^2\left(y^2 + 2y + 5\right) = x^2$ denklemini çözünüz.

Bu denklem lineer değildir, aynı zamanda T.D.Denk. de değildir. Dikkat edildiğinde görülebilir ki,

$$y + 1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(y^2 + 2y + 5\right)$$

dir. Buna göre, $u = y^2 + 2y + 5$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{du}{dx} = 2\,(y + 1)\frac{dy}{dx}$$

olacağından, yukarıda verilen diferansiyel denklem

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx} + x^2 u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} + 2x^2 u = 2x^2$$

şeklini alır. Bulduğumuz bu son denklem, birinci mertebeden bir adi lineer diferansiyel denklemdir. Buna göre,

$$u \,.\, e^{\int P(x)dx} = \int Q(x) e^{\int P(x)dx}\, dx + c$$

$$u \,.\, e^{\frac{2}{3}x^3} = \int 2x^2 e^{\frac{2}{3}x^3}\, dx + c = e^{\frac{2}{3}x^3} + c$$

$$u = 1 + c\, e^{-\frac{2}{3}x^3}$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa,

$$y^2 + 2y + 5 = 1 + c\, e^{-\frac{2}{3}x^3}$$

$$y^2 + 2y + 4 = c\, e^{-\frac{2}{3}x^3}$$ bulunur.

Örnek 9. $\frac{dy}{dx} = e^{2x} + 3y$ denklemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + c\right]$$

$$y = e^{3\int dx}\left[\int e^{2x}e^{-\int 3dx}\,dx + c\right]$$

$$y = e^{3x}\left[\int e^{2x}e^{-3x}\,dx + c\right]$$

$$y = e^{3x}\left[\int e^{-x}\,dx + c\right]$$

$y = ce^{3x} - e^{2x}$ elde edilir.

Örnek 10. $\frac{dy}{dx} + 3y = x^2$ denklemini çözünüz.

Bu denklemin integrasyon faktörü

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{3x}$$

olduğundan, denklemin genel çözümü

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{3x}\right) = x^2e^{3x}$$

$$y \cdot e^{3x} = \int x^2e^{3x}\,dx + c$$

$$y \cdot e^{3x} = e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}\right) + c$$

$y = ce^{-3x} + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}\right)$ bulunur.

2-6 BERNOULLİ DENKLEMİ

Birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklem,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = y^n Q(x) \tag{36}$$

şeklinde ise bu diferansiyel denkleme **Bernoulli denklemi** denir. Bu denklemi çözmek için önce denklemin bütün terimleri y^{-n} ile çarpılır.

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \tag{37}$$

Burada, $v = y^{1-n}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)\, y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

elde edilir. Bu bağıntı, (37) denkleminde yerine konursa,

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)\,P(x)\,v = (1-n)\,Q(x)$$

olur. Bu denklemde, $(1-n)\,P(x) = A(x)$ ve $(1-n)\,Q(x) = B(x)$ yazılırsa,

$$\frac{dv}{dx} + A(x)v = B(x) \tag{38}$$

bulunur. Denk. 38, (31) denklemi türünden bir denklemdir ve aynı şekilde çözülür. Yalnız burada bağımsız değişken x ve bağımlı değişken v olduğundan, denklemin çözümünde $v = y^{1-n}$ yazılarak (36) numaralı Bernoulli denkleminin genel çözümü bulunmuş olur.

Örnek 1. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$ denklemini çözünüz.

Bu bir Bernoulli diferansiyel denklemidir. $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = -\frac{1}{x}$ ve $n = 2$ 'dir. Bu denklem (37) denklemi şekline sokulursa,

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{1}{x}$$

olur. Burada,

$$v = y^{-1} \quad \text{ve} \quad \frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

olduğundan, bu değerler yukarıda yerlerine konursa,

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x} v = \frac{1}{x}$$

elde edilir. İntegrasyon faktörü $\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\ln x} = x$ olduğundan,

$$x \frac{dv}{dx} + v = 1$$

$$\frac{d}{dx}(xv) = 1$$

$$xv = x + c$$

bulunur. Burada v yerine değeri yazılırsa,

$$\frac{1}{y} = 1 + c x^{-1} \quad \text{veya} \quad y = \frac{1}{1 + c/x} \quad \text{elde edilir.}$$

Örnek 2. $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = y^3 x^{-2}$ denklemini çözünüz.

Önce denklemin bütün terimlerini y^{-3} ile çarpalım.

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y^{-2} = x^{-2}$$

$$v = y^{-2} \quad \text{ve} \quad \frac{dv}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dv}{dx} + \frac{2}{x} v = x^{-2}$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x} v = -2x^{-2}$$

bulunur. Bu denklemin integrasyon çarpanı,

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{4}{x} dx} = e^{-\ln x^4} = x^{-4}$$

dır. Denklemin bütün terimleri μ ile ayrı ayrı çarpılırsa,

$$x^{-4} \frac{dv}{dx} - 4x^{-5} v = -2x^{-6}$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x} v = -2x^{-2}$$

Bu denklem, (31) denklemi türünden bir denklemdir.

Burada $p(x) = -4x$ ve $Q(x) = -2x^{-2}$ dir. Buna göre denklem kolayca çözülür ve burada v yerine y^{-2} konarak verilen diferansiyel denklemin genel çözümü bulunmuş olur.

Örnek 3. $x\dfrac{dy}{dx} + y = -2x^6y^4$ denklemini çözünüz.

$$y^{-4}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-3} = -2x^5$$

$$y^{-3} = v \;,\; \frac{dv}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{1}{3}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = -2x^5$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{3}{x}v = 6x^5$$

Burada integrasyon çarpanı,

$$\mu(x) = e^{-3\int\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x^3}$$

olduğundan,

$$\frac{d}{dx}\left(vx^{-3}\right) = 6x^2$$

$$vx^{-3} = 2x^3 + c$$

bulunur. $v = y^{-3}$ değerini yerine koyarsak,

$$y^{-3} = x^3(2x^3 + c)$$

$$y = \frac{1}{x}\left(2x^3 + c\right)^{-1/3}$$ bulunur.

Örnek 4. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{2x} = xy^{-3}$, $y(1) = 2$ başlangıç - değer problemini çözünüz.

$$y^3\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2x}y^4 = x \;,\; n = -3$$

$$v = y^4 \,, \quad \frac{dv}{dx} = 4y^3 \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{4}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{2x} v = x$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x} v = 4x \quad \text{ve} \quad \mu = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left(v x^2\right) = 4x^3$$

$$v x^2 = x^4 + c$$

$$y^4 = x^2 + c\, x^{-2} \tag{39}$$

bulunur. Başlangıç şartları uygulanırsa,

$2^4 = 1^2 + c$ ve buradan $c = 15$

elde edilir. c'nin bu değeri (39) denkleminde yerine konursa,

$x^2 y^4 = x^4 + 15$ bulunur.

Yukarıda gördük ki, Bernoulli diferansiyel denklemi lineer bir denklem olmadığı halde, bir değişken değiştirmesi yapılarak kolayca lineer denklem haline dönüştürülebilmektedir. Bernoulli denkleminin dışında lineer olmayan başka denklemler de vardır. Bunların bazıları benzer şekilde lineer hale dönüştürülmekte ve kolayca çözülebilmektedir. Bu tür denklemlere bir örnek,

$$\frac{dy}{dx} + P(x) = Q(x) e^{my} \tag{40}$$

dır. Bu denklem şimdiye kadar gördüğümüz denklem türlerinden hiçbirine benzememektedir. Denklemin terimlerini e^{-my} ile çarparsak,

$$e^{-my}\frac{dy}{dx} + e^{-my} P(x) = Q(x)$$

olur. Burada, $Y = e^{-my}$ değişken değişikliği yapılır ve Y'nin x'e göre türevi alınırsa,

$$\frac{dY}{dx} = -m e^{-my}\frac{dy}{dx}$$

elde edilir. Bu değerler yukarıda yerlerine konursa,

$$-\frac{1}{m}\frac{dY}{dx} + P(x) Y = Q(x)$$

bulunur. Bu denklem bir lineer diferansiyel denklemdir ve kolayca çözülür.

Lineer olmayan bir başka diferansiyel denklem de,

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{41}$$

şeklinde bir denklemdir. Bu denkleme **Riccati denklemi** denir. Genel olarak bu denklemi analitik olarak çözmek mümkün değildir. Bununla beraber, eğer denklemin bir $y = u(x)$ özel çözümü biliniyorsa, o zaman

$$y = u - \frac{1}{Y}$$

transformasyonu yapılarak denklem Y'ye göre bir lineer denkleme dönüştürülebilir. Çözüm aşağıda gösterilmiştir.

$y = u(x)$ bir özel çözüm olduğundan Riccati denkleminde yerine konursa,

$$\frac{du}{dx} = P(x)u^2 + Q(x)u + R(x) \tag{42}$$

olur. (42) denklemi (41) denkleminden çıkartılırsa,

$$y' - u' = P(y^2 - u^2) + Q(y - u)$$

elde edilir. Burada $y - u = v$ değişken değiştirmesi yapıldığında,

$$\frac{dv}{dx} = P\left(2uv + v^2\right) + Qv$$

$$= (2uP + Q)v + Pv^2 \tag{43}$$

elde edilir. Bu denklem ise bir Bernoulli diferansiyel denklemidir ve kolayca çözülür.

Bernoulli denklemi ile ilgili örneklere ek olarak Riccati diferansiyel denklemine bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 5. $\frac{dy}{dx} = xy^2 + (1 - 2x)y + x - 1$ denklemini çözünüz.

Kolayca görülmektedir ki $y = 1$ bir özel çözümdür. O zaman, Denk. 43 yardımı ile,

$$\frac{dv}{dx} = (2x + 1 - 2x)v + xv^2$$

$$= v + xv^2$$

olur. Bu bir Bernoulli denklemidir. $v = \frac{1}{Y}$ alındığında,

$$\frac{dY}{dx} + Y = -x$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$Y = 1 - x + c\,e^{-x}$$

bulunur. Böylece, verilen Riccati denkleminin genel çözümü

$$y = 1 + \frac{1}{c\,e^{-x} + 1 - x}$$

elde edilir.

Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler içinde önemli bir yeri olan bir başka denklem de,

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad (44)$$

$$= x\,p + f(p)$$

denklemidir. Bu denkleme **Clairaut Denklemi** denir. Burada $p = dy/dx$ dir.

Eğer $f(p)$ lineerse, bir başka deyişle, $f(p) = \alpha\, p + \beta$ şeklinde bir fonksiyonsa (44) denklemi lineerdir. $f(p)$ lineer değilse denklem de lineer değildir. Diferansiyel denklemin türevi alınırsa,

$$p = p + [x + f'(p)]\frac{dp}{dx}$$

$$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için,

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{veya} \quad x + f'(p) = 0$$

olmalıdır. Burada önce birinci koşul ile Clairaut denklemi birlikte gözönüne alınırsa, (44) denkleminin genel çözümü,

$$y = c\,x + f(c)$$

bulunur. İkinci koşul gözönüne alınarak Clairaut denkleminin çözümünün bulunması burada ele alınmayacaktır.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen diferansiyel denklemleri ve başlangıç-değer problemlerini çözünüz.

   a. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x$

   b. $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} y = x^2 \sin x$

   c. $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$

   d. $\frac{dy}{dx} + 2y = 10e^{-2x}$

   e. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{3y} = x \ , \ y(1) = 1$

   f. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 1$

   g. $xy' = y + 2x$

   h. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = \sin x$

   ı. $(3xy + 2)\,dx + x^2\,dy = 0 \ , \ y(1) = 1$

   j. $x\frac{dy}{dx} + y = 2 \sin 2x + 2x \cos x \ , \ y(\pi) = 1$

   k. $\frac{dy}{dx} + y = e^{2t}$

   j. $x\,dy + (5y - 6x)\,dx = 0$

   m. $y' + y/x^2 = 1/x^2$

   n. $\left(x^2 + 2\right)\frac{dy}{dx} + 4xy = 3x$

   o. $y' + e^x y = e^x$

   p. $\frac{dy}{dx} - y = \sin 2x \ , \ y(0) = 0$

   q. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^2 \sin 3x$

2. Aşağıdaki Bernoulli diferansiyel denklemlerini çözünüz.

a. $\frac{dy}{dx} - y = xy^2$

b. $y^2\,dx = \left(x^3 - xy\right)dy$

c. $\frac{dy}{dx} + \frac{x+1}{2x}y = \frac{x+1}{xy}$

d. $y\,dx + \left(x + x^2y^4\right)dy = 0$

e. $\frac{dy}{dx} - y = -y^2\left(x^2 + x + 1\right)$

f. $\frac{dy}{dx} = 2(3x + y)^2 - 1 \quad , \quad y(0) = 1$

g. $\left(y^4 - 2xy\right)dx + 3x^2\,dy = 0 \quad , \quad y(2) = 1$

h. $\frac{dy}{dx} = y - xy^3e^{-2x}$

ı. $y\left(6y^2 - x - 1\right)dx + 2x\,dy = 0$

j. $6y^2\,dx = x\left(2x^3 + y\right)dy$

k. $2x^2\frac{\cos y}{\sin y}\frac{dy}{dx} = 5x - 3\sin y$

l. $x^2y' = y^2 + 2xy$

m. $xy' + y = y^2 \ln x$

n. $(\cos y)\,y' + 2x - 2x\sin y = 0$

o. $y^2\frac{dx}{dy} + xy = 2y^2 + 1$

3. Aşağıda verilen denklemler Riccati ve Clairaut tipi diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemleri çözünüz.

a. $\frac{dy}{dx} = -y^2 + xy + 1 \quad , \quad u = x$

b. $\frac{dy}{dx} = -8xy^2 + 4x(4x + 1)y - \left(8x^3 + 4x^2 - 1\right) \quad , \quad u = x$

c. $\frac{dy}{dx} = x^3\left(y^2 - x^2\right) + \frac{y}{x}$

d. $\frac{dy}{dx} = xy^2 + 2y + 1$

e. $y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

f. $p^2 + x^3p - 2x^2y = 0$, $(p = dy/dx)$

g. $2p^2 + x^3p - 2x^2y = 0$

h. $y = x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{5}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

BÖLÜM 3

Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları

3-1 GİRİŞ

Bölüm 1'de açıkça vurgulandığı gibi, fiziksel bilimler, biyolojik bilimler, sosyal bilimler ve mühendislik bilimlerinde karşılaşılan pekçok sayıda problemin çözümünde diferansiyel denklemler çok önemli bir yer tutar. Öyle ki, bazı tabiat kanunları doğrudan birer diferansiyel denklemle ifade edilir.

Hangi tür problemle karşılaşılırsa karşılaşılsın ilk iş problemi matematiksel olarak ortaya koymak, başka bir deyişle probleme uyan diferansiyel denklemi yazmaktır. Sonra, denklemin çözümü problemle birlikte ele alınır ve gerekli yorum yapılır. Bu nedenle diferansiyel denklemlerin ilgi alanı çok geniştir.

Bu bölümde, herbiri birinci mertebeden birer lineer diferansiyel denklemle ifade edilebilen problemlerden bazıları ele alınacaktır.

3-2 DİK YÖRÜNGELER

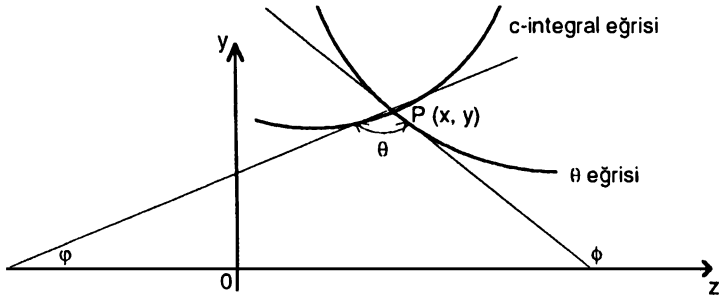
x y - düzlemi içinde bir D bölgesinde tarif edilmiş bulunan bir eğri ailesi

$$f(x, y, c) = 0 \qquad (1)$$

denklemi ile ifade edilir. Burada c bir parametredir ve c nin her değeri yeni bir eğriyi tarif eder. Bu eğriler birlikte bir eğri ailesi oluşturur.

Bir eğri ailesinin eğrilerinin herbirini aynı bir θ açısı ile kesen bir eğri düşünülebilir. Bu eğriye, adı geçen eğri ailesinin θ - yörüngesi denir. Verilen eğri ailesine bağlı olmak üzere eğer θ - açısı 90° olursa bu yörüngeye **dik yörünge** denir.

Verilen bir eğri ailesinin θ – yörüngesini bulmak için bu ailenin $f(x, y, y') = 0$ diferansiyel denkleminden yararlanılır. Bu diferansiyel denklemin bir c integral eğrisi ile θ - eğrisinin bir $P(x, y)$ noktasında kesiştiğini varsayalım. Şekil 1'de görüldüğü üzere θ - eğrisi öyle bir eğridir ki, $P(x, y)$ noktasında bu eğriye teğet olan doğru, aynı noktada c-integral eğrisine teğet olan doğru ile θ - açısı yapmaktadır.



Şekil 1

Açıkça görülmektedir ki Denklem 1, c 'nin her noktasında ayrı bir y' değerini vermektedir. Böylece her nokta için bir (x, y, y') üçlüsü vardır. Diğer taraftan θ eğrisi üzerinde, her nokta için $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y'})$ üçlüsü tanımlanabilir. Burada $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ kesişme noktasının koordinatlarını, $\tilde{y}'$ ise θ - eğrisinin teğetinin eğimini göstermektedir. Bu demektir ki, P noktasında, $x = \tilde{x}$, $y = \tilde{y}$, $y' = \tan\varphi$, $\tilde{y}' = \tan\phi$ 'dir.

Bu durumda y' ve $\tilde{y}'$ arasında

$y' = \tan\varphi = \tan(\phi - \theta)$ yazılabilir.

Buradan

$$y' = \tan(\phi - \theta) = \frac{\tan\phi - \tan\theta}{1 + \tan\phi \,.\, \tan\theta} = \frac{\tilde{y}' - \tan\theta}{1 + \tilde{y}' \tan\theta}$$

bağıntısı elde edilir.

Bu durumda, bir θ - yörünge eğrisi $P(x, y)$ noktasında

$$f(x\,,\,y\,,\,y') = f\left(\tilde{x}\,,\,\tilde{y}\,,\,\frac{\tilde{y}' - \tan\theta}{1 + \tilde{y}' \tan\theta}\right) = 0$$

bağıntısını sağlayacaktır.

Bu demektir ki, $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ yerine x , y , y' yazılırsa θ - yörünge eğrisinin diferansiyel denklemi olan

$$f\left(x\,,\,y\,,\,\frac{y' - \tan\theta}{1 + y' \tan\theta}\right) = 0 \qquad (2)$$

denklemi elde edilir. Özel olarak, dik yörünge hali için

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{y' - \tan\theta}{1 + y' \tan\theta} = -\frac{1}{y'} \quad \text{bulunur.}$$

Öyle ise, (2) diferansiyel denklemi

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 \quad \text{şekline dönüşür.}$$

Sonuç olarak, verilen eğrinin diferansiyel denklemi $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ şeklinde ele alınırsa, burada dy/dx yerine $-dx/dy$ yazmak suretiyle, $Q(x, y)\,dx - P(x, y)\,dy = 0$ diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem ile ifade edilen eğri ailesi de, ilk verilen eğri ailesinin dik yörüngesini teşkil eder.

Fizik ve mühendislik bilimlerinde birbirine dik eğri aileleri ile ilgili problemlere sık sık rastlanır. Aşağıda verilen örneklerde bu problemlerden bazıları ele alınacaktır.

Örnek 1. $x^2 + y^2 = c^2 \quad , \qquad c > 0$ (3)

eğri ailesi, aynı O merkezli ve c yarıçaplı dairelerdir. Bu eğrilere dik olan eğri ailesini bulunuz.

O noktasına pozitif yüklü bir elektriksel nokta-yük koyduğumuzu düşünelim. xy-düzlemi üzerinde, elektriksel potansiyel şiddeti aynı olan noktaların geometrik yeri c yarıçaplı bir dairedir. Öyle ise, yukarıda verilen eğri ailesi, adı geçen eş potansiyel eğrilerin matematiksel ifadesinden başka birşey değildir.

(3) denklemi ile verilen fonksiyonun diferansiyeli alınırsa,

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0$$

elde edilir. Bu eğri ailesine dik olan eğri ailesinin diferansiyel denklemi ise,

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

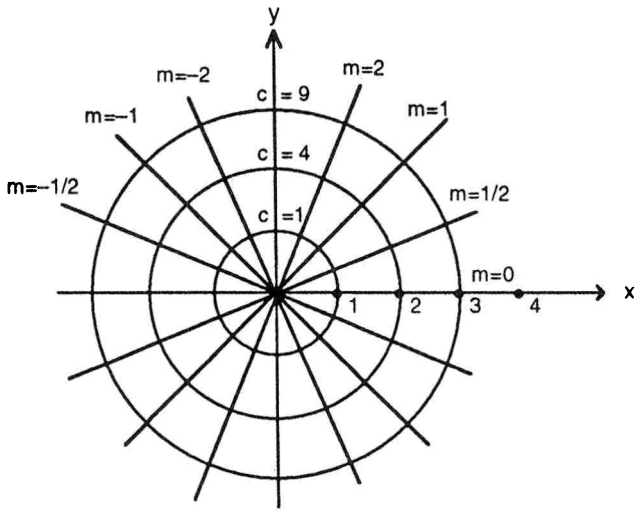
olur. Buradan,

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$$

$$y = m\,x \tag{4}$$

elde edilir. (4) denklemi, O noktasından çıkan ve xy-düzlemi içinde her doğrultuda uzanan doğrular ailesidir. Her iki ailenin birbirine dik olan eğrileri aşağıda Şekil 2 'de birlikte gösterilmiştir. Burada $y = mx$ denklemi ile ifade edilen doğrular, elektrik

alanın O noktasından çıkan ve *xy*- düzlemi içinde uzanan kuvvet çizgilerini temsil etmektedir.



Şekil 2

Örnek 2. Herbirinin tepe noktası 0 noktası olan

$$y^2 = 4cx \tag{5}$$

parabollerine dik olan eğri ailesini bulunuz.

Önce, Denk. 5 'in her iki tarafının diferansiyeli alınır ve c yok edilirse,

$$2x\,dy - y\,dx = 0 \tag{6}$$

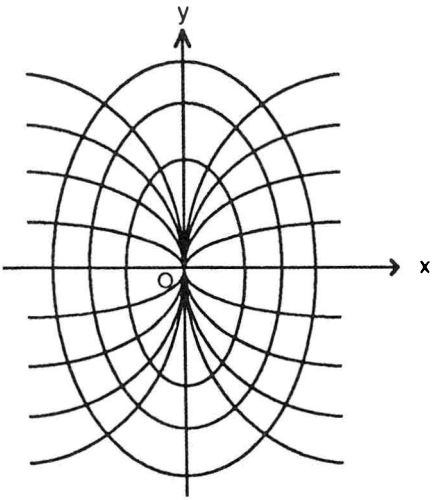
elde edilir. Bu denklemde dy/dx yerine $-dx/dy$ yazılırsa, (5) numaralı denklemle verilen eğri ailesine dik olan eğri ailesini temsil eden diferansiyel denklem,

$$2x\,dx + y\,dy = 0 \tag{7}$$

bulunur. İntegral alınırsa,

$$2x^2 + y^2 = m^2 \tag{8}$$

elde edilir. Görülüyor ki, aranan eğri ailesi, O merkezli bir elips ailesidir ve her iki eğri ailesi Şekil 3 'de birlikte gösterilmiştir.



Şekil 3

Örnek 3. $cx^2 + y^2 = 1$ (9)

denklemi ile verilen eğrilere dik olan eğrileri bulunuz.

Bundan önceki örnek problemlerden farklı olarak bu defa Denk. 9' un türevi alınırsa,

$$cx + yy' = 0 \qquad (10)$$

bulunur. (9) ve (10) denklemleri arasında c yok edilirse,

$$(1 - y^2) + x\,y\,y' = 0$$

elde edilir. Burada, y' yerine $-1/y'$ konursa, dik yörünge eğri ailesinin diferansiyel denklemi

$$\left(1 - y^2\right) - \frac{x\,y}{y'} = 0$$

veya

$$\left(1 - y^2\right) dy = xy\,dx$$

bulunur. Bu denklemin integrali alınırsa,

$$x^2 + y^2 - \ln y^2 = m \qquad (11)$$

elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıda verilen denklemler bir parametreli eğri ailelerini göstermektedir. Bu eğri ailelerinin herbiri için dik yörünge eğrilerini veren diferansiyel denklemleri bulunuz ve eğrilerin grafiklerini çiziniz.

1. $x - 2y = c$

2. $y^2 = c\,x^3$

3. $x^2 = cy$

4. $x - y = c\,x^2$

5. $x^2 - cx + 4y = 0$

6. $x^2 - y^2 = c$

7. $x^2 + c\,y^2 = 1$

8. $x^2 - y^2 = cx$

9. Merkezleri x-ekseni üzerinde bulunan ve herbiri 0 noktasında y-eksenine teğet olan eğri ailesine dik olan eğriler ailesinin denklemini bulunuz.

10. $x^n + y^n = c$ eğrilerinin, $y = x / (1 - mx)$ eğrilerine dik olması için n' nin değeri ne olmalıdır?

11. $x^2 + 3\,y^2 = cy$ eğrilerine dik olan ve (1, 2) noktasından geçen eğriler ailesinin denklemini bulunuz.

12. $y = c\,x^2 + A$ parabollerine dik olan eğriler, $x^2 + 2\,y^2 - y = m$ denklemi ile verilen elips ailesi olması için A' nın değerini bulunuz.

13. Herbirinin tepe noktası 0 noktası olan ve odak noktaları y-ekseni üzerinde bulunan paraboller ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

14. Herbirinin merkezi x-ekseni üzerinde, 0 'dan değişik uzaklıklarda olan değişik yarıçaplardaki dairelerin diferansiyel denklemini bulunuz.

3-3 MEKANİK PROBLEMLERİ

Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin en önemli uygulama alanı elemanter mekaniktir. Bu kısımda, bir rijid cismin Newton'un ikinci hareket kanununa uyan doğrusal hareketi ile ilgili bazı problemler ele alınacaktır.

Bilindiği gibi Newton'un ikinci hareket kanunu,

$$F = ma$$

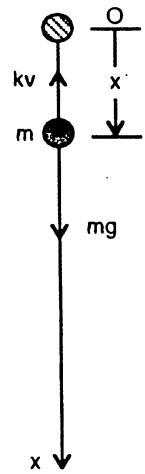
$$= \frac{d}{dt}(mv)$$

$$= \frac{dp}{dt}$$

şeklinde ifade edilir. Burada m rijid cismin kütlesi, F cisme etki eden sabit kuvvet, a cismin hareketinin ivmesi, v hız ve p cismin momentumudur. Kuvvet sabit olduğu zaman a ivmesi sabittir ve bu durumda cismin hızı zamana bağlı olarak değişir. Gidilen yol x ile ifade edildiği zaman cismin v ani hızı dx/dt olarak tarif edilir.

Örnek 1. Kütlesi m olan bir cismin yerden oldukça yüksekte bulunan bir noktadan ilk hızsız olarak serbest düşmeye bırakılıyor. Cisme etki eden yerçekim kuvveti sabit ve hava direncinin cismin hızı ile orantılı olduğu kabul edildiğine göre, herhangi bir t anında cismin başlangıç noktasından hangi uzaklıkta olduğunu ve o anda hangi hızla hareket etmekte olduğunu bulunuz.

Şekil 4 'te görüldüğü gibi, pozitif x-ekseni boyunca aşağı doğru düşmekte olan cisim bir t anında O başlangıç noktasından x kadar uzakta ve bir v hızı ile hareket etmekte olsun. k pozitif bir katsayı olmak üzere, cisim v hızı ile aşağı doğru hareket etmekte iken cismin hareketine engel olmaya çalışan hava direnme kuvveti cismin hızı ile orantılıdır ve kv 'ye eşittir. Cisme etki eden yerçekim kuvveti de mg olduğuna göre, t anında cisme etki eden toplam kuvvet $mg-kv$ olur. O zaman, Newton 'un ikinci hareket kanununa göre,



Şekil 4

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \qquad (12)$$

yazılır. (12) denklemi, birinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemdir. Bu denklem kolayca çözülür ve

$$v = \frac{mg}{k} + c_1 e^{-kt/m} \tag{13}$$

elde edilir. $t = 0$ anında cismin hızı (ilk hız) "sıfır" olduğundan,

$$0 = \frac{mg}{k} + c_1 \quad \text{ve buradan} \quad c_1 = -\frac{mg}{k}$$

bulunur. c_1 'in bu değeri Denk. 13 'de yerine konursa,

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right) \tag{14}$$

elde edilir. Burada $t \to \infty$ için v 'nin alacağı değer v_l (limit hızı) ile gösterilir ve Denk. 14 'den $v_l = mg/k$ bulunur.

Ayrıca ifade edelim ki, hava direnme kuvveti cismin hızı ile orantılı olduğuna göre cismin hızı arttıkça hava direnme kuvveti de artacak ve bir süre sonra hava direnme kuvveti cisme etki eden yerçekim kuvvetine eşit olacaktır. Bu duruma ulaşıldığında cisme etki eden toplam kuvvet "sıfır" olacağından, o andan itibaren cismin hızı değişmeyecek ve sabit kalacaktır. Cismin bu hızına tarif olarak **limit hız** denir. Bu durumda,

$$mg - kv_l = 0$$

olacağından, limit hızın değeri yukarıda olduğu gibi $v_l = mg/k$ bulunur.

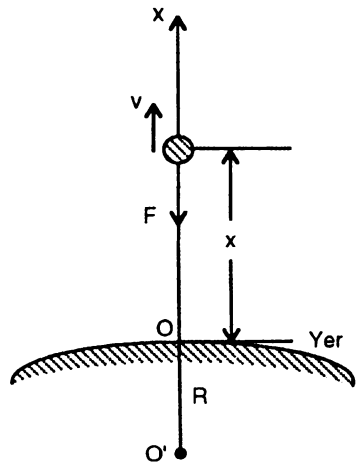
t anında cismin O 'dan uzaklığını bulmak için, (14) denkleminde $v = dx/dt$ yazılır ve integral alınır. Problemin ifadesinde verilen başlangıç şartlarından biri olan $x(0) = 0$ şartı kullanılarak integral sabitinin değeri bulunur ve sonuç olarak

$$x = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-kt/m}\right) \tag{15}$$

elde edilir.

(14) ve (15) denklemlerinde görülen m, g ve k değerleri, genel olarak seçilen birim sistemine bağlı olmak üzere verilen sayısal değerlerdir.

Örnek 2. Kütlesi m olan bir cisim yer küresi üzerinde bir yerden yukarıya doğru bir v_0 ilk hızı ile fırlatılıyor. Hava direncini ihmal ederek, cismin bir daha yer küresine geri dönmemesi için v_0 ilk hızının ne olması gerektiğini bulunuz.



Şekil 5

Bu defa x-ekseninin pozitif yönü yukarı doğru olsun. Hava direnci ihmal edildiğine göre, burada hareketi etkileyen tek kuvvet F yerçekim kuvvetidir. Bu kuvvetin değeri ise, Newton 'un Evrensel Çekim Kanununa göre değişmektedir. Bu durumda, yerküresi üzerinde yerçekim ivmesinin değeri g ile, yerküresinin kütlesi M ve yarıçapı R ile gösterilirse, Evrensel Çekim Kanununa göre,

$$m g = G \frac{m M}{R^2} \quad \text{ve buradan} \quad G = \frac{g R^2}{M} \quad \text{bulunur.}$$

t anında, cismin yerküresinden olan uzaklığı x ve hızı v olsun. Buna göre hareket denklemi,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - G \frac{m M}{(x + R)^2}$$

veya

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{g R^2}{(x + R)^2} \tag{16}$$

olur. Görülüyor ki, (16) denklemi v, x ve t gibi üç ayrı değişken içermektedir. v 'nin değeri yalnız x cinsinden ifade edilmek istenirse, aşağıdaki şekilde t elimine edilir. Burada,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

olduğundan, bu değer yukarıda Denk. 16 'da yerine konursa,

$$v \frac{dv}{dx} = - \frac{g R^2}{(x + R)^2}$$

bulunur. Bu denklemin değişkenlerine ayrılarak integrali alınırsa,

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{x+R} + c \qquad (17)$$

elde edilir. $t = 0$ anında $x = 0$ ve ilk hız v_0 olduğu gözönüne alınırsa ve bu değerler Denk. (17) 'de yerine konursa, $c = \frac{1}{2}v_0^2 - gR$ bulunur. Böylece bulunan c değeri Denk. (17) 'de yerine konursa,

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R} \qquad (18)$$

elde edilir. (18) denklemi, Şekil 5 'de görüldüğü üzere x 'e bağlı olarak cismin yerden uzaklaşma hızını verir.

Cismin geri dönmemesi için her yerde v değerinin pozitif olması gerekeceğinden, bu şartı sağlayan ilk hız değeri v_e ile gösterildiğinde,

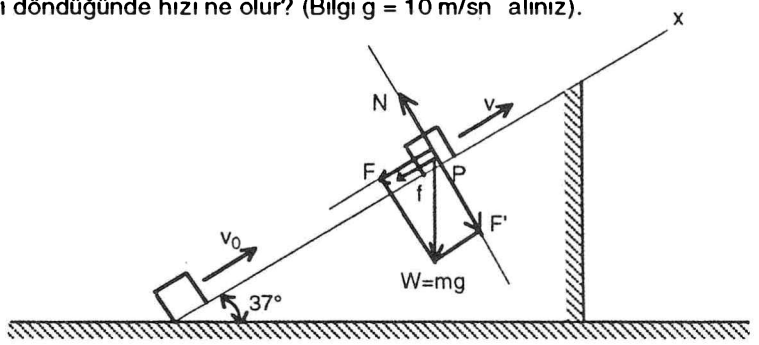
$$v_e^2 - 2gR \geq 0$$

şartı sağlanmalıdır. Öyle ise, cismin tekrar yerküresine dönmemesi için cismin atış hızının en az,

$v_e = \sqrt{2gR}$ olması gerekir.

MKS sisteminde, $g = 9{,}8$ m/sn^2 ve $R = 6{,}3 \times 10^6$ m olduğundan $v_e = 11{,}1 \times 10^3$ m/sn bulunur.

Örnek 3. Yatayla 37° açı yapan bir eğik düzlem üzerinde bulunan bir cisim, eğik düzlem boyunca ve yukarı doğru $v_0 = 12$ m/sn 'lik bir ilk hızla fırlatılıyor. Cisim ile eğik düzlem arasındaki sürtünme katsayısı $\mu = 0{,}25$ olarak biliniyor. Buna göre, (a) cisim eğik düzlem boyunca hangi uzaklığa kadar gidebilir ve (b) cisim atıldığı noktaya geri döndüğünde hızı ne olur? (Bilgi $g = 10$ m/sn^2 alınız).



Şekil 6

Şekil 6 'da görüldüğü gibi, cisim fırlatıldıktan t *sn* sonra eğik düzlem üzerinde 0 'dan x uzaklığında bir P noktasında v hızı ile hareket halindedir. Cisim ağırlığının eğik düzlem doğrultusunda ve eğik düzleme dik doğrultudaki bileşenleri ve sürtünme kuvveti gözönüne alındığında, cismin hareket denklemi, başka bir deyişle cismin hareketinin diferansiyel denklemi,

$$m \frac{dv}{dx} = - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha \qquad (19)$$

veya

$$\frac{dv}{dx} = - (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) g$$

olur. İntegral alınırsa,

$$v = - g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) t + c_1 \qquad (20)$$

bulunur. $v(0) = v_0$ başlangıç şartı (20) denklemine uygulanırsa,

$$v = v_0 - g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) t \qquad (21)$$

elde edilir. Bu denklem, herhangi bir t anında cismin hızını veren ifadedir.

Denk. 21 'de $v = dx/dt$ yazılır ve integral alınırsa,

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) t^2 + c_2$$

bulunur. Bu denkleme $x(0) = 0$ başlangıç şartı uygulanırsa $c_2 = 0$ olur. Buna göre,

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) t^2 \qquad (22)$$

elde edilir.

Açıkça görülüyor ki, (21) ve (22) numaralı denklemler, cismin hareketi ile ilgili tüm bilgiyi içermektedir.

Problemin ifadesinde verilen değerler Denk. 21'de yerlerine konursa,

$$v = 12 - 10 (0{,}6 + 0{,}25 \times 0{,}8) t$$

$$v = 12 - 8 t \qquad (23)$$

elde edilir. Bu denklem, cismin zamana bağlı olarak hız ifadesini verir. Burada $v = 0$ yazılırsa, cismin duruncaya kadar geçen zaman,

$0 = 12 - 8 t$ ve buradan $t = 1{,}5$ sn

bulunur. Problemde verilen değerler (22) denkleminde yerlerine konursa bu denklem,

$$x = 12t - 4t^2$$

şeklini alır. Burada t yerine $1,5$ yazılırsa, $x = 9\ m$ bulunur. Böylece problemde sorulan birinci sorunun yanıtı bulunmuş olur.

Problemin ikinci kısmı ile ilgili hareket denklemi,

$$\frac{dv}{dt} = g \sin\alpha - \mu g \cos\alpha$$
$$= 4$$

şeklinde yazılır. Bunun anlamı, geri dönüşte, cismin eğik düzlem boyunca aşağı doğru hareketin ivmesi $4\ m/sn^2$ 'dir. Bu denklemde dv/dt yerine $v\,dv/dx$ yazılırsa,

$$v\,dv = 4\,dx$$
$$\frac{v^2}{2} = 4x + c$$

bulunur. $x = 0$ için $v = 0$ başlangıç şartı bu denkleme uygulanırsa $c = 0$ olur. Böylece, geri dönüş hareketinde x'e bağlı olarak v'nin değerini veren ifade

$$v^2 = 8x$$

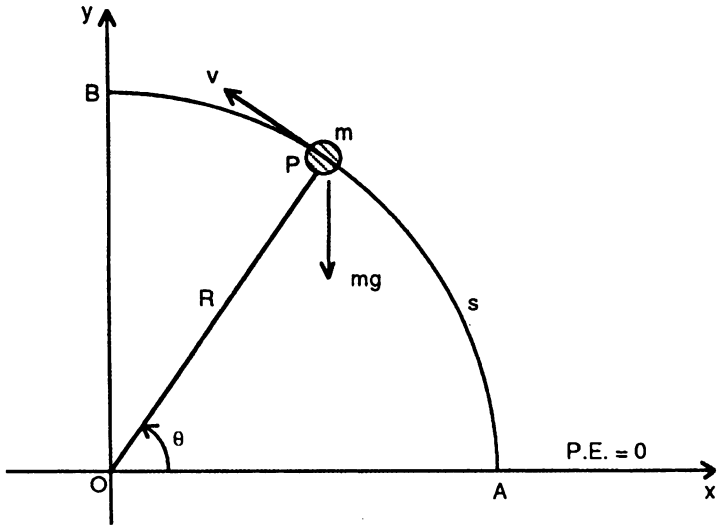
elde edilir. Burada $x = 9$ m yazılırsa, cismin 0 noktasına varış hızı $v = 8,48\ m/sn$ bulunur.

Örnek 4. Kütlesi m olan bir cismin R yarıçaplı çeyrek çember şeklindeki sürtünmesiz bir AB rayı üzerinde hareket etmektedir. Cisim A noktasından yukarı doğru fırlatıldığı anda hızı v_0 ve B'ye ulaştığı anda sıfır'dır. O merkezli AB yayı düşey düzlem içinde yeralmaktadır. Bu verileri gözönüne alarak cismin bulunduğu yere bağlı olarak hızını bulunuz. Şekil 7 'ye bakınız.

A noktasından v_0 başlangıç hızı ile fırlatılan cisim bir t zamanı sonunda P noktasından v hızı ile geçmektedir. OP'nin x-ekseni ile yaptığı açı θ'dır. Cismin mg ağırlığının teğet doğrultusundaki bileşeni $mg\cos\theta$ olduğundan hareketin denklemi,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\cos\theta, \text{ veya}$$

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = -mg\cos\theta \qquad (24)$$



Şekil 7

olur. Burada s, cismin A 'dan itibaren uzaklığını, başka deyişle AP yayının uzunluğunu ifade etmektedir. Tarif olarak $ds/dt = v$ ve $dv/dt = v\,dv/ds$ olduğundan, (24) denklemi

$$m v \frac{dv}{ds} = - m g \cos \theta \qquad (25)$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan, $ds = R\,d\,\theta$ olduğundan, hareketin diferansiyel denklemi,

$$m v dv = - m g R \cos \theta\, d\, \theta \qquad (26)$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g R \sin \theta = E \quad \text{olur.} \qquad (27)$$

Bu denklemde, θ 'ya bağlı olarak v 'nin değeri elde edilir. E, integrasyon sabitidir. Burada birinci terim, gözönüne alınan yerde cismin kinetik enerjisini ve ikinci terim ise aynı yerde cismin potansiyel enerjisini tarif eder. O zaman Denk. 27, "Enerjinin Korunumu Prensibi" nin ifadesinden başka birşey değildir.

ALIŞTIRMALAR

1. Kütlesi m olan bir cisim aşağıdan yukarıya doğru bir v_0 ilk hızı ile fırlatılıyor. Hava direnci ihmal ediliyor.
   (a) Cismin çıkabileceği maksimum yüksekliği bulunuz.
   (b) Cismin maksimum yüksekliğe varması için geçen zamanı bulunuz.
   (c) Yüksekliğe bağlı olarak cismin hızını bulunuz.

2. Bir istasyonda duran tren harekete geçiyor ve bir süre sabit ivmeli hareket yapıyor. Trenin hızı 15 km/hr değerine ulaştıktan sonra 200 m daha yol gittiğinde hızı 25 km/hr oluyor. Buna göre,
   (a) Hareketin ivmesini bulunuz.
   (b) 200 m yolu, trenin ne kadar zamanda aldığını bulunuz.
   (c) Trenin 15 km/hr hızını kazandığı yerin istasyona uzaklığını bulunuz.

3. Kütlesi M olan bir tahta takoz yatay bir düzlem üzerinde durmaktadır. m kütlesinde bir mermi v_0 ilk hızı ile tahta takoza çarpıyor ve kısa süren çarpışmadan sonra takoz içinde kalıyor. Takozla yatay düzlem arasındaki sürtünme katsayısı μ olduğuna göre çarpışmadan sonra takoz hangi uzaklıkta durur?

4. Yoğunluğu $\rho = 0{,}5\ \text{gm/cm}^3$ olan 0,1 kg ağırlığında bir ağaç bilya, deniz kenarında bir yerden yukarıya doğru 20 m/s 'lik bir hızla fırlatılıyor. Cismin hızının v olduğu herhangi bir anda, cisme etki eden hava direnci "newton" cinsinden 2v olarak veriliyor ve dönüşünde cismin, sakin ve durgun deniz yüzeyine dik olarak çarptığı kabul ediliyor. Bu durumda,
   (a) Deniz suyunun yoğunluğu 1,2 gm/cm^3 olduğuna göre, su içinde yalnız bilyanın ağırlığını ve suyun kaldırma kuvvetini gözönüne alarak bilyanın su seviyesinden hangi derinliğe kadar indiğini bulunuz.
   (b) Suyun kaldırma kuvvetine ek olarak bilyanın su içinde hareketine karşı koyan su direncinin, bilyanın hızının karesi ile orantılı olduğu ve orantılık katsayısının 1 'e eşit olduğu bilindiğine göre bilya hangi derinliğe kadar iner?

5. Durgun suda hareket eden su motorunun toplam ağırlığı 400 kg 'dır. Durgun halden harekete geçen motor 200 N büyüklüğünde sabit bir çekiş kuvvetinin etkisi altında, kuvvet doğrultusunda ve yönünde hareket etmektedir. Motorun hareketine karşı direnme gösteren suyun direnme kuvveti, motorun v hızı ile orantılıdır ve orantılık katsayısı $k = 1{,}5\ \text{N} \cdot \text{s} / \text{m}$ 'dır. Motor harekete geçtikten 2 dak. sonra hızı ne olur?

6. Yatayla 30 açı yapan bir eğik düzlem üzerinde durgun halde bulunan 20 kg ağırlığında bir sandık 5 s süre ile eğik düzlem üzerinde ve eğik düzlem doğrultusunda 150 N 'luk sabit bir kuvvetle çekiliyor. 5 'inci saniyenin sonunda ip kopuyor.

(a) Sürtünme katsayısı $\mu = 0{,}3$ olduğuna göre cisim kaç saniye sonra ilk harekete başladığı noktaya geri döner?

(b) Cisim başlangıç noktasından hangi hızla geçer?

7. Yerden oldukça yüksekte bulunan ve duran bir helikopterden 50 gm ağırlığında bir mermi aşağı doğru 300 m/s 'lik bir hızla fırlatılıyor. Hava direnci "newton" cinsinden $5 \times 10^{-4} v^2$ olarak verilir.

(a) Zamana bağlı olarak merminin hızını bulunuz.

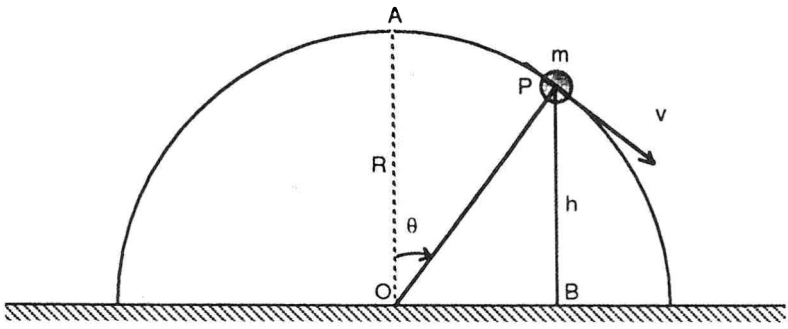
(b) Helikopterin yerden yüksekliğini bulunuz.

8. Esneklik katsayısı k olan bir çelik yayın bir ucuna kütlesi m olan bir cisim bağlanıyor. Yatay ve sürtünmesiz bir düzlem üzerinde hareket eden cisim O denge konumundan itibaren x_0 uzaklığına kadar çekip bırakılıyor.

(a) Cisim O 'dan itibaren $x_0/2$ uzaklığından geçerken hızı ne olur?

(a) O denge konumundan geçerken cismin hızı ne olur?

9. Kütlesi *m* olan bir çelik bilya, Şekil 7 'de görülen *R* yarıçaplı yarım kütle şeklinde bir cismin *A* tepe noktasından ilk hızsız olarak düşmeye bırakılıyor. Sürtünme yok kabul edildiğine göre, bilyanın küreyi $h = 2R/3$ yüksekliğinde bir *P* noktasında terkettiğini gösteriniz.



Şekil 8

10. Kütlesi 10 kg olan bir cisim yatay bir düzlem üzerinde, hareket doğrultusunda ve zıt yönde cisme etki eden ve gittikçe artan bir kuvvetin etkisi altında 2 m yol gittikten sonra duruyor. Tatbik edilen kuvvet her 3 cm 'de 4 N arttığı ve başlangıçta "sıfır" olduğu bilindiğine göre, cismin kinetik enerjisindeki kaybının kaç joule olduğunu bulunuz.

11. Gökyüzünde durgun bir havada duran bir helikopterden paraşütü ile birlikte toplam ağırlığı 80 kg olan bir adam ilk hızsız olarak kendisini aşağıya bırakıyor. Paraşüt açılmadan önce hava direnci $v/2$ olarak biliniyor. Hareket başladıktan 5 s sonra paraşüt açılıyor ve bu durumda hava direnci $5/8\ v^2$ 'ye eşit oluyor.

(a) Paraşüt açılmazdan az önce paraşütçünün hızını bulunuz.

(b) Yere çarpmadan az önce paraşütçünün hızını bulunuz.

12. Ayın yarıçapı yaklaşık olarak 1700 km 'dir. Ay yüzeyi üzerinde yeçekim ivmesi, yeryüzündeki yerçekim ivmesi g cinsinden 0,165 g kadardır. Bir cismin ay küresini terketme hızını bulunuz.

3-4 HIZ PROBLEMLERİ

Genel olarak hız denildiği zaman birim zamanda gidilen yol akla gelir. Bunun dışında hız, bir fiziksel büyüklükte birim zaman içinde meydana gelen değişme olarak tarif edilir. Örneğin, bir radyoaktif elementin miktarı zamana bağlı olarak azalır ve birim zaman içinde meydana gelen azalma miktarına bu **radyoaktif elementin bozunma hızı** denir. Herhangi bir cismin büyüme hızı, bir kimyasal reaksiyonun hızı, difüzyon hızı, bir ortamda ısının yayılma hızı, bir karışımın oluşma hızı, hastalıkların yayılma hızı vs. hep aynı ve benzer şekilde tarif edilir. Öyle ise, zamana bağlı olarak değişik değerler alan bir fiziksel büyüklük $Q(t)$ ile gösterilirse, bir dt zaman aralığında Q'da meydana gelen değişme dQ olur ve bu durumda Q'nun değişme hızı, dQ/dt şeklinde tarif edilir. Bu nedenle uygulamada karşılaşılan bazı hız problemlerini, birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemin çözümü olarak kolayca çözümleyebiliriz.

Örnek 1. Bir radyoaktif element olan toryum-234 (Th^{234}) izotopu, ß-ışınları neşrederek Pa^{234}'ye dönüşmektedir. Bu izotopun bozunma hızı, elementin mevcut miktarı ile doğru orantılıdır. Ayrıca, 100 miligram Th - 234 izotopundan bir hafta içinde geriye 82,04 miligram kaldığı bilindiğine göre, (a) herhangi bir t anında geriye ne kadar Th-234 kaldığını ve (b) mevcut miktarın yarıya inmesi için ne kadar zaman geçmesi gerektiğini bulunuz.

Problemin çözümünü veren diferansiyel denklem, bir başlangıç-değer problemi olarak,

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \quad , \quad Q(0) = 100$$
$$Q(7) = 82{,}04$$

şeklinde yazılır. Burada t zamanı "gün" cinsinden ve herhangibir anda maddenin mevcut miktarı $Q(t)$ ise "miligram" cinsinden ifade edilmiştir. k katsayısına gelince, bu problemde, zaman geçtikçe madde miktarı azaldığından k katsayısı bir negatif sayıdır.

Diferansiyel denklemin çözümü,

$$Q = ce^{kt}$$

dir. Burada başlangıç şartlarından ilki uygulanırsa $c = 100$ bulunur. Bu değer Denk. 29 'da yerine konur ve ikinci başlangıç şartı fonksiyona uygulanırsa,

$$82{,}04 = 100e^{7k}$$

ve buradan,

$$k = \frac{\ln 0{,}8204}{7} = -0{,}0283(\text{gün})^{-1}$$

elde edilir. k'nin bu değeri (29) denkleminde yerine konursa,

$$Q(t) = 100e^{-0,0283t} \tag{30}$$

olur. Herhangibir t anında geriye kaç miligram *Th-234* kaldığı bu denklem yardımıyla kolayca bulunur.

Bir radyoaktif elementin miktarının yarıya inmesi için geçen zamana o elementin **yarı ömrü** denir ve T ile gösterilir. Bu durumda Denk. 30,

$$50 = 100e^{-0,0283T}$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$T = \frac{\ln 2}{0,0283} = 24,5 \quad \text{gün bulunur.}$$

Örnek 2. Newton 'un soğuma kanununa göre, soğuyan bir cismin sıcaklığındaki değişme hızı, cismin ve dış ortamın sıcaklıkları arasındaki fark ile orantılıdır. Buna göre, zamana bağlı olarak cismin sıcaklığını veren ifadeyi bulunuz.

Herhangi bir anda cismin sıcaklığını T ile ve dış ortamın sabit kabul edilen sıcaklığını da T_d ile gösterelim. O zaman, cismin sıcaklığını zamanın fonksiyonu olarak veren diferansiyel denklem,

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_d) \tag{31}$$

olur. Burada k pozitif bir katsayıdır. Denk. 31 yeniden düzenlenirse,

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_d \tag{32}$$

yazılır. $T(0) = T_0$ başlangıç koşulu kullanılarak (32) denklemi çözülürse,

$$T = T_d + (T_0 - T_d)\,e^{-kt}$$

elde edilir.

Örnek 3. Bir tank, $t = 0$ anında içinde Q_0 kg tuz içeren 100 lt tuz çözeltisi ile doludur. Litresinde 1/3 kg tuz bulunan başka bir tuz çözeltisi 5 lt/dak 'lık bir hızla tanka akmaktadır. Karıştırma ile tank içinde sürekli olarak homogen bir su-tuz karışımı elde edilmekte ve karışım aynı hızla tankdan dışarı çıkmaktadır. t anında tankta mevcut tuz miktarını veren $Q(t)$ ifadesini bulunuz.

Herhangi bir t anında tanktaki tuz miktarının değişme hızı, birim zamanda tanka giren tuz miktarından gene birim zamanda tankdan çıkan tuz miktarının farkına eşittir. Buna göre,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{5}{3} - \frac{5}{100}Q$$

olur. burada dQ/dt, birim zaman içinde tanktaki tuz miktarında meydana gelen artma veya azalma miktarıdır. Bu denklem yeniden düzenlenirse,

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{5}{100}Q = \frac{5}{3} \tag{33}$$

elde edilir. Denk. 33, birinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklemdir ve çözümü,

$$Q(t) = \frac{100}{3} + c\,e^{-0.05t} \tag{34}$$

dır. Burada c, keyfi ve sabit bir sayıdır.

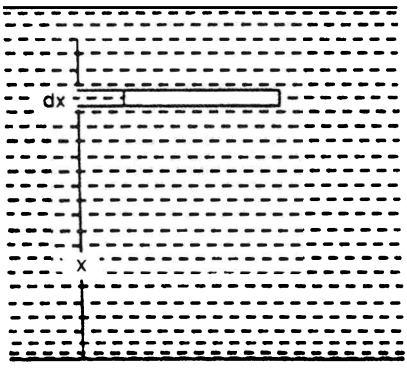
$t = 0$ anında tankta mevcut tuz miktarı Q_0 kg olarak verildiğine göre $Q(0) = Q_0$ başlangıç şartı (34) denklemine uygulandığında $c = Q_0 - 100/3$ bulunur. c'nin bu değeri (34) denkleminde yerine konursa,

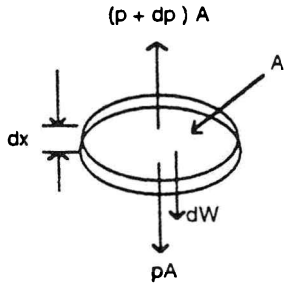
$$Q = \frac{100}{3}\left(1 - e^{-0.05t}\right) + Q_0\,e^{-0.05t} \tag{35}$$

elde edilir. Burada Q 'nün birimi "kg" ve t 'nin birimi "dak" cinsinden ifade edilmiştir.

Örnek 4. Ağzı açık derin bir kap durgun halde bulunan sıvı ile doludur. Sıvı içinde yüksekliğe bağlı olarak hidrostatik basıncı veren ifadeyi bulunuz. Şekil 8'e bakınız.

Kap içinde bulunan sıvının yoğunluğu ρ ve açık





Şekil 9

hava basıncı p_0 olsun. Sıvı içinde, kabın tabanından itibaren x yüksekliğinde, taban alanı A ve yüksekliği dx olacak şekilde silindirik bir sıvı kütlesi gözönüne alalım. Sıvı içinde x yüksekliğinde basınç p ve $x + dx$ yüksekliğinde basınç $p + dp$ olsun. Bu durumda, Şekil 8'de görüldüğü gibi, silindrik sıvı kütlesine alt yüzden yukarıya doğru etki eden kaldırma kuvveti PA ve üst yüzden aşağı doğru etki eden toplam kuvvet $(p + dp)A$ olur. Bu sıvı kütlesine yan yüzden etki eden toplam kuvvet sıfır'dır. Ayrıca sıvı kütlesine etki eden yerçekim kuvveti $dW = \rho gA\,dx$ 'dir. Bütün bu kuvvetlerin etkisi altında sıvı kütlesi dengede bulunduğundan,

$$pA = (p + dp)A + \rho gA\,dx$$

yazılır. Buradan,

$$\frac{dp}{dx} = -\rho g \tag{36}$$

bulunur. (36) denklemi, sıvı içinde derinliğe bağlı olarak basıncın değişim hızını ifade eder.,

Tabandan x_1 yüksekliğinde basınç p_1 ve x_2 yüksekliğinde P_2 ile gösterilirse, Denk. 32 'nin integralinden

$$p_2 - p_1 = -\rho g\,(x_2 - x_1) \tag{37}$$

elde edilir. Sıvı yüzeyinde basınç açık hava basıncı (p_0) olduğuna göre, (37) denkleminin yeniden düzenlenmesi halinde, sıvı yüzeyinden h derinliğinde basınç,

$$p = p_0 + \rho gh \tag{38}$$

olur.

Örnek 6. n kişiden oluşan bir topluluk içinde, p sayıda insan hastalıklı ve q sayıda insan hastalıksız olarak saptanmış bulunmaktadır. Hastalık bulaşıcı olup bir zaman süreci içinde sağlamlara da bulaşması olasılığı vardır. Hasta insanların toplum içindeki oranı $x = p/n$ ve sağlamların oranı ise $y = q/n$ olur. Eğer, n oldukça büyük bir sayı ise x ve y birer sürekli değişken sayı gibi kabul edilebilir. O zaman, dx/dt hastalığın yayılma hızını ifade eder. İnsanların topluluk içinde serbest dolaşım içinde oldukları ve hastalığın hızının hastalıklı ve sağlıklı insanların biribiriyle fiziki teması ile orantılı olduğu kabul edilirse, herhangibir t anında hastalıklı insanların sayısı ne olur?

Hastalığın yayılma hızı hem x ile hem de y ile orantılı olduğundan bunların çarpımı ile de orantılıdır. Orantılık katsayısı k ile gösterilirse,

$$\frac{dx}{dt} = kxy \tag{39}$$

olur. $x + y = 1$ olduğundan, y yerine x cinsinden değeri yazıldığında (39) denklemi,

$$\frac{dx}{dt} = k\,x\,(1 - x)$$

şeklini alır. İntegral alınırsa,

$$\ln x - \ln (1 - x) = k\,t + c$$

veya

$$\frac{x}{1 - x} = c\,e^{k\,t} \tag{40}$$

elde edilir. Başlangıç şartı $x\,(0) = x_0$ olarak biliniyorsa, $c = x_0\,(1 - x_0)$ olur. Yerine konursa,

$$x = \frac{x_0}{x_0 + (1 - x_0)\,e^{-kt}} \tag{41}$$

bulunur.

Örnek 7. Bir *A* maddesi, kimyasal reaksiyon sonucu başka bir maddeye dönüşmektedir. Birim zamanda reaksiyona uğrayan madde miktarı, başka bir deyişle reaksiyonun hızı, o anda mevcut A maddesi miktarı ile orantılıdır. Ayrıca bilinmektedir ki, $t = 0$ anında mevcut madde miktarı Q_0'ın üçte ikisi 30dak. içinde diğer bir maddeye dönüşmektedir. Herhangi bir t anında A maddesinden geriye nekadar kaldığını bulunuz.

A maddesi zamanla azaldığından ve azalma hızı mevcut madde miktarı ile orantılı olduğundan,

$$\frac{dQ}{dt} = -\,k\,Q \tag{42}$$

yazılır. Denk. 42'nin integrali alınırsa,

$$Q = ce^{-k\,t} \tag{43}$$

bulunur. Başlangıç şartları (43) denklemine uygulanırsa,

$$\frac{Q_0}{3} = Q_0\,e^{-30k} \qquad \text{ve buradan} \qquad k = \frac{1}{30}\ln 3$$

elde edilir. Bu değerler Denk. 43'de yerlerine konursa,

$$Q\,(t) = Q_0\,e^{-\frac{t}{30}\ln 3} \qquad \text{olur.}$$

Örnek 8. Aşağıdaki seri reaksiyonlar için R'nin maksimum derişimini ve bu derişime ne zaman ulaşılacağını bulunuz.

$$A \xrightarrow{k_2} R \xrightarrow{k_2} S$$

k_1 ve k_2 reaksiyon hız sabitleri olup $k_1 = k_2$'dir.

A reaktifinin yok olma hızı,

$$\frac{dQ_A}{dt} = -k_1 Q_A \tag{44}$$

Burada Q_A, herhangibir t anında A maddesinin miktarıdır. $t = 0$ anında Q_A'nın değeri Q_{A_0} olarak kabul edilirse, Denk. 44'ün çözümünden

$$Q_A = Q_{A_0} e^{-k_1 t} \tag{45}$$

elde edilir.

R ara maddesi derişiminin değişim hızı ise,

$$\frac{dQ_R}{dt} = k_1 Q_A - k_2 Q_R \tag{46}$$

olur. Q_A yerine, Denk. 45'de verilen değeri konulursa

$$\frac{dQ_R}{dt} + k_2 Q_R = k_1 Q_{A_0} e^{-k_1 t}$$

olur. $k_1 = k_2$ olduğundan her iki reaksiyon hız sabiti olarak k değeri alınırsa,

$$\frac{dQ_R}{dt} + k Q_R = k Q_{A_0} e^{-kt} \tag{47}$$

yazılır. Bu denklem, Denk. 31 tipinde, homogen olmayan birinci mertebe bir adi differansiyel denklemdir ve genel çözümü,

$$Q_R = e^{-kt}\left[\int k Q_{A_0} e^{-kt} \cdot e^{kt} dt + c\right]$$

$$= e^{-kt}(k Q_{A_0} t + c)$$

dır. Burada c, bir integrasyon sabitidir. $t = 0$ için $Q_R = 0$ olduğundan $c = 0$ bulunur. Bu durumda;

$$Q_R = k Q_{A_0} t e^{-kt} \tag{48}$$

elde edilir.

Q_R'nin maksimum değere ulaşması için geçen zaman,

$$\frac{dQ_R}{dt} = k\,Q_{A_0}\left(e^{-kt} - kte^{-kt}\right) = 0$$

denklemin çözümünü veren t değeridir. Buna göre,

$$t_{max} = \frac{1}{k}$$

bulunur.

Örnek 9. $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$ seri reaksiyonlarında *B* ara ürününün verimini bulunuz. Başlangıçta reaktörde sadece *A* reaktifi vardır.

Kabul edelim ki, $t = 0$ anında $Q_A = Q_{A_0}$, $Q_B = 0$ ve $Q_C = O$ dır. A maddesinin yok olma hızı,

$$\frac{dQ_A}{dt} = -k_1 Q_A \tag{49}$$

ve B 'nin üretim hızı,

$$\frac{dQ_B}{dt} = k_1 Q_A - k_2 Q_B \tag{50}$$

dır. (49) ve (50) denklemleri birlikte gözönüne alınırsa,

$$\frac{dQ_B}{dQ_A} = -1 + \frac{k_2 Q_B}{k_1 Q_A}$$

elde edilir. B ara ürünün verimi Q_B/Q_{A_0} olarak tarif edildiğinden, (49) ve (50) denklemleri ayrı ayrı çözülerek (Not: Bu işlemler okuyucuya bırakılmıştır.)

$$x_B = \frac{Q_B}{Q_{A_0}} = \frac{k_1}{k_1 - k_2}\left[\left(\frac{Q_A}{Q_{A_0}}\right)^{k_2/k_1} - \frac{Q_A}{Q_{A_0}}\right]$$

elde edilir.

Örnek 10. A ve B kimyasal maddeleri birbiriyle reaksiyona girerek C kimyasal maddesini oluşturuyor. C maddesinin oluşum hızı, o anda mevcut A ve B madde miktarlarının çarpımına bağlı olarak değişmektedir. C'nin oluşması için her 1 kg B için 2 kg A gerekmektedir. Başlangıçta A'nın miktarı 10 kg ve B'nin miktarı 20 kg ise ve 20 dakika sonra 6 kg C oluşmuşsa, herhangi bir anda C'nin miktarı ne olur?

x miktarında C maddesi ancak 2x/3 miktar A ve x/3 miktar B'den oluşacağından, C'nin oluşma hızı

$$\frac{dx}{dt} = k\,(15 - x)\,(60 - x)$$

olur. Başlangıç şartları

$t = 0$ için $x = 0$ ve $t = \frac{1}{3}$ için $x = 6$ olduğundan

$$\int \frac{dx}{(15 - x)(60 - x)} = \int k\,dt + c_1$$

yazılır. Diğer taraftan

$$\int \frac{dx}{(15 - x)(60 - x)} = \int \frac{1}{45}\left(\frac{1}{15 - x} - \frac{1}{60 - x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{45} \ln\left(\frac{60 - x}{15 - x}\right)$$

olduğundan, yukarıda yerine konursa

$$\frac{60 - x}{15 - x} = c\,e^{45kt}$$

olur. $t = 0$ anında $x = 0$ olduğundan, $c = 4$ bulunur. Böylece

$$\frac{60 - x}{15 - x} = 4e^{45kt}$$

olur. $t = 1/3$ için $x = 6$ olduğundan,

$$e^{15k} = \frac{3}{2}$$

bulunur. Bu değer yukarıda yerine konursa,

$$\frac{60 - x}{15 - x} = 4\left(e^{15t}\right)^{3t} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{3t}$$

ve sonuç olarak

$$x = \frac{15\left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{3t}\right]}{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}$$

elde edilir.

Görülüyor ki, $t \to \infty$ için $x \to 15$ kg olur ki bu da beklenen bir sonuçtur.

Örnek 11. Sıcaklığı 100°C olan bir cisim 50°C sıcaklığındaki bir odaya bırakılıyor ve soğumaya terkediliyor. 10 dakika sonra cismin sıcaklığının 90°C'ye düştüğü görülüyor. Başlangıç anından itibaren ne kadar zaman sonra cismin sıcaklığının 60°C'ye düşeceğini bulunuz.

Newton'un soğuma kanunu Örnek 2 'de verilmiştir. Buna göre cismin t anındaki sıcaklığı,

$$T = 50\,(1 + e^{-kt})$$

yazılır. t = 10 dk. sonra, cismin sıcaklığı T = 90°C şartından k bulunuz.

$$90 = 50\,(1 + e^{-10k})$$

$$k = 0{,}014$$

Öyle ise herhangi bir t anında cismin sıcaklığı

$$T = 50\,(1 + e^{-0{,}014t})$$

olur. Buradan, T = 60°C için t bulunur.

$$t = -\frac{1}{0{,}014} \ln\left(\frac{T - 50}{50}\right)$$

$$= -\frac{1}{0{,}014} \ln\left(\frac{60 - 50}{50}\right)$$

$$= 115 \text{ dakika}$$

elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1. Başlangıçta toplam kütlesi m_0 olan bir roket düşey doğrultuda ve yukarı doğru bir v_0 ilk hızı ile fırlatılıyor. Roket dışarıya her birim zaman içinde aynı ve sabit miktarda madde fırlatıyor. Bu durumda bir t anında roketin kütlesi,

   $m(t) = m_0 - \alpha t$

   şeklinde ifade edilir. Roketten dışarı fırlatılan sıcak gaz moleküllerinin roketi terkettikleri anda rokete göre sabit bir β hızı ile hareket ettikleri kabul edildiğine ve hava direnci ihmal edildiğine göre, herhangi bir t anında roketin nerede olduğunu ve hangi hızla hareket etmekte olduğunu bulunuz.

2. Kimyasal reaksiyon sonucu bir madde başka bir maddeye dönüşüyor. Dönüşüm hızı, o anda ana maddenin mevcut miktarı ile orantılı olup 5 dak. içinde ana maddenin %10'u başka bir maddeye dönüşmektedir. Buna göre,

   (a) 30 dak. içinde ana maddenin yüzde kaçı dönüşüme uğrar?

   (b) Nekadar zaman içinde ana maddenin %80'i ikinci bir maddeye dönüşür?

3. Kimyasal reaksiyona uğrayan bir madde için dönüşüm hızı, o anda mevcut ana madde miktarının karesi ile orantılıdır. Başlangıç anında ana madde miktarı Q_0 ve orantılık katsayısı k'dır. Henüz dönüşüme uğramamış madde miktarını zamana bağlı olarak veren ifadeyi bulunuz.

4. Bir cıvalı termometre ile sıcaklık ölçümü yapılıyor ve cismin sıcaklığı −10°C bulunuyor. Termometre hemen oda sıcaklığı 20°C olan bir odaya getiriliyor ve bir dakika sonra +45°C değeri okunuyor. Zamana bağlı olarak termometrede hangi değerleri okuyacağımızı ve 5 dak. sonra hangi değeri okuyacağımızı bulunuz.

5. Radiumun bozunma hızı mevcut miktarı ile orantılıdır. Bir miktar radiumun 25 yıl içinde %1,1 inin başka maddeye dönüştüğü bilindiğine göre radiumun yarı ömrünü bulunuz.

6. Bir kap içinde bulunan A ve B maddeleri bir kimyasal reaksiyon sonucu birlikte bir C maddesine dönüşüyor. C maddesinin miktarında birim zamanda meydana gelen artış, o anda henüz dönüşüme uğramamış olan A ve B maddelerinin miktarlarının çarpımı ile orantılıdır. Ayrıca bilinmektedir ki, t = 0 anında A maddesinden a kadar ve B maddesinden b kadar mevcuttur ve bir birim A ile bir birim B nin dönüşümünden bir birim C oluşmaktadır. Buna göre, bir t anında mevcut C maddesi miktarını bulunuz.

7. Oda sıcaklığı bilinmeyen bir yere 100°C sıcaklığında bir küçük cisim bırakılıyor. 10 dak. sonunda cismin sıcaklığı 90°C'ye ve 20 dak. sonunda ise 85°C'ye düşüyor. Oda sıcaklığını bulunuz.

8. Bir cismin ısınma ısısı, cismin bir gramının sıcaklığını 1°C arttırmak için gereken ısı miktarıdır. Buna göre, 100°C sıcaklığında bir cisim 50°C sıcaklığında

bir suyun içine bırakılıyor. 10 dak. sonra cismin sıcaklığı 80°C ve suyun sıcaklığı 60°C oluyor. Kabul edelim ki, cismin kaybettiği ısı miktarının tamamı suyun ısınmasına harcanıyor. Buna göre, herhangi bir anda cismin sıcaklığını ve suyun sıcaklığını bulunuz. Denge sıcaklığını bulunuz.

9. 100 lt'lik bir tank, her litresinde 1 kg tuz bulunacak şekilde 50 litre tuzlu su ihtiva ediyor. Tank içine dakikada 4 lt saf su gönderiliyor ve tanktan devamlı karıştırılmış olarak dakikada 2 lt tuzlu su dışarı atılıyor. Tank dolduğunda tuzlu suyun konsantrasyonu ne olur?

10. Bir tanktan dakikada 5 lt sıvı dışarı akıyor. Başlangıçta tankta 100 lt saf su bulunuyor. Bu tankın içine litresinde 3 kg tuz bulunan tuzlu su dakikada 4 lt'lik bir hızla boşaltılıyor ve tankın içindeki sıvı düzgün ve devamlı olarak karıştırılıyor. t zamanı sonunda tankta mevcut tuz miktarını kg olarak bulunuz.

11. Kimyasal reaksiyona uğrayan bir cisimden t anında geriye kalan ana madde miktarı m (t) ile ifade ediliyor. $m(t_1) = m_1$ ve $m(t_2) = m_2$ olduğuna göre, reaksiyon hızı katsayısının,

$$k = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{m_1}{m_2}$$

olduğunu gösteriniz.

12. Kütlesi m olan bir cisim yatay x ekseni doğrultusunda her an hızının küpü ile orantılı bir direnme kuvvetinin etkisi altında hareket etmektedir. Cisim, $t = 0$ anında $x = 0$ noktasından v_0 ilk hızı ile geçtiğine göre bir t anında cismin hızını ve bulunduğu yerin başlangıç noktasından uzaklığını bulunuz.

13. Kütlesi m olan bir cisim yatay x ekseni doğrultusunda, $F = -kx + f(v)$ kuvvetinin etkisi altında hareket etmektedir. Burada k pozitif ve sabit bir sayıdır. Ayrıca $v>0$ için $f(v) = -bv^2$ ve $v<0$ için $f(v) = bv^2$ dir. Burada b, sıfırdan farklı pozitif bir sayıdır. v 'nin değerini x cinsinden bulunuz.

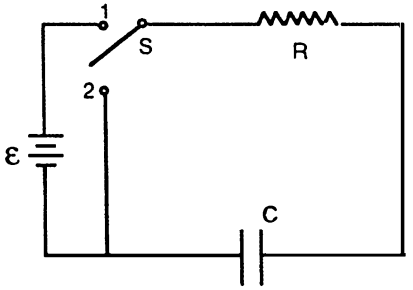
14. Bir radyoaktif maddenin yarı ömrü 1000 yıldır. 100 yıl sonra radyoaktif maddeden ne kadar geriye kalır?

3-5 ELEKTRİK DEVRE PROBLEMLERİ

Bir doğru akım elektrik devresinde devre elemanları yalnız düz dirençlerden oluşuyorsa, devrenin herhangi bir kesitinden geçen akım şiddeti zamana bağlı olarak değişmez ve sabit kalır. Eğer devrede dirençlerden başka veya yalnız olarak herhangi bir kondansatör veya bir bobin veya her ikisi birden devre elemanları olarak yer alıyorsa durum farklıdır; o zaman, devreden geçen akım şiddeti zamana bağlı olarak değişim gösterir. Bu durumda, Ohm Kanunu ve Kirchoff kanunları kullanılarak birinci mertebeden veya ikinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemler elde edilir. Başlangıç şartları kullanılarak bu denklemler çözüldüğünde, herhangi bir t anında devreden geçen I akım şiddeti zamanın fonksiyonu olarak elde edilir.

Örnek 1. Aşağıda Şek. 9'da verilen RC elektrik akım devresinde, (a) önce S anahtarının 1 konumuna getirilmesi durumunda, (b) yeterli süre geçtikten sonra bu defa anahtarın 2 konumuna getirilmesi durumunda devreden geçen akım şiddetinin zamana bağlı olarak nasıl bir değişim gösterdiğini bulunuz.

(a) S anahtarı boşta iken sığası C olan düzlem kondansatör tamamen yüksüzdür. Anahtarın 1 ucuna dokunduğu başlangıç anından itibaren C kondansatörü sürekli olarak yüklenmeye devam eder ve kısa bir süre sonra kondansatörün yükü $q_{max} = C\mathcal{E}$ maksimum değerine ulaşır. Burada $\mathcal{E}$, üretecin e.m.k.'ini ifade eder. Bu durumdan sonra devreden geçen akım şiddeti sıfır kabul edilir.



Şekil 10

Kondansatörün yüklenmesi sırasında, herhangi bir t anında kondansatörün yükü q ve devreden geçen akım şiddeti I olsun. Bu andan itibaren geçen bir dt zamanı içinde devrenin herhangi bir kesitinden dq yükü geçecek ve sonuç olarak dt zamanı sonunda kondansatörün yükü dq kadar artacaktır. Enerjinin korunumu prensibine göre, elektromotor kuvveti $\mathcal{E}$ olan üretecin dt zamanı içinde dq yükünü kondansatöre pompalaması için sarfettiği enerji ($=\mathcal{E}dq$), aynı zaman içinde joule enerjisi cinsinden açığa çıkan enerji ($=I^2 R\, dt$) ile, gene aynı zaman içinde kondansatörde depo edilen enerji ($= d\,(q^2/2C)$'nin toplamına eşittir. Buna göre,

$$\mathcal{E}\, dq = I^2 R\, dt + d\,(q^2/2C)$$

$$= I^2 R\, dt + \frac{q}{C}\, dq$$

yazılır. Bütün terimler ayrı ayrı dt ile bölünürse,

$$\varepsilon \frac{dq}{dt} = I^2 R + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} \tag{51}$$

ve buradan

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C R} q = \frac{\varepsilon}{R} \tag{52}$$

elde edilir. Denk. 52 çözülürse,

$$q(t) = C\varepsilon \left(1 - e^{-t/RC}\right) \tag{53}$$

elde edilir. Burada q(t)'nin zamana göre türevi alınırsa,

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} \tag{54}$$

bulunur. Görülüyor ki, $t = 0$ için $q = 0$ ve $I_{max} = \varepsilon/R$, $t \to \infty$ için $q_{max} = CE$ ve $I = 0$ olur.

(b) Kondansatör maksimum yükle yüklü durumda iken S anahtarını aniden 1 konumundan 2 konumuna getirmiş olalım ve bu anı burada zaman başlangıcı olarak kabul edelim. Bu durumda kondansatörün yükü kısa bir zaman süreci içinde R direnci üzerinden boşalacak ve sonunda sıfır olacaktır. Bu defa oluşan kapalı devrede $\varepsilon = 0$ 'dır. Kondansatörün boşaldığı sırada herhangi bir t anında kondansatörün uçları arasındaki gerilim q/C ve R direnç telinin uçları arasındaki gerilim ise IR olduğundan Kirchhoff kanununa göre,

$$IR + \frac{q}{C} = 0$$

veya

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0 \tag{55}$$

elde edilir. Denk. 52 'de olduğu gibi bu denklem de sabit katsayılı birinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. (55) denkleminin çözümünden,

$$q = C\varepsilon e^{-t/RC} \tag{56}$$

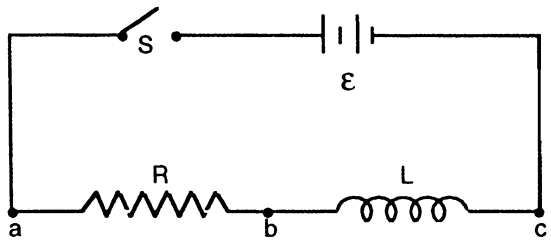
ve buradan da,

$$I = -\frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} \tag{57}$$

bulunur. Burada (–) işareti, bu konumda akımın bir önceki duruma göre ters yönde geçtiğini göstermektedir.

Örnek 2. Şek. 10'da görülen elektrik devresinde, bir R direnci ile öz-indüksiyon katsayısı L olan bir bobin seri olarak bağlanmıştır. S anahtarı kapandığında devreden geçen akımın zamana bağlı olarak nasıl değişim gösterdiğini bulunuz.

S anahtarının kapandığı anı başlangıç anı olarak kabul edelim. Kısa süre sonra herhangi bir t anında devreden geçen akım şiddeti I olsun. Bu anda R direnci üzerindeki potansiyel düşmesi RI ve L bobini üzerindeki potansiyel düşmesi de $L\,dI/dt$ olduğundan



Şekil 11

Kirchhoff kanununa göre devre elamanları üzerindeki potansiyel düşmelerinin cebirsel toplamı üretecin elektromotor kuvvetine eşit olacağından

$$R\,I + L\frac{dI}{dt} = \varepsilon \tag{58}$$

yazılır. Bu denklem yeniden düzenlenirse,

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}\,I = \frac{\varepsilon}{L} \tag{59}$$

elde edilir. (59) denklemi, Denk. 31 tipinde sabit katsayılı homogen olmayan birinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Başlangıç şartları bilinen böyle bir denklemin nasıl çözüleceğini biliyoruz. Ayrıca, bu denklem değişkenlerine ayrılabilen bir denklem olduğundan

$$\frac{dI}{E - RI} = \frac{dt}{L}$$

yazılır. Her iki tarafın integrali alındığında,

$$-\frac{1}{R}\ln(\varepsilon - RI) = \frac{t}{L} + c \tag{60}$$

bulunur. Burada c bir integral sabitidir. $t = 0$ için $I = 0$ olduğundan,

$$c = -\frac{1}{R}\ln\varepsilon$$

bulunur. c'nin bu değeri, Denk. 60 'da yerine konulduğunda,

$$-\ln(\varepsilon - RI) = \frac{R}{L}t - \ln\varepsilon$$

ve buradan

$$\ln \frac{(\varepsilon - R I)}{\varepsilon} = -\frac{R}{L} t$$

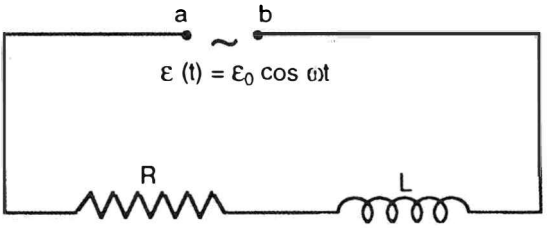
bulunur. Bu denklem I 'ya göre çözülürse

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right) \tag{61}$$

elde edilir.

Örnek 3. Birbiriyle seri olarak bağlı bulunan bir R direnci ile L bobininin uçları arasına $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$ alternatif gerilimi tatbik ediliyor. Devreden geçen akım şiddetini zamana bağlı olarak bulunuz.

Görülüyor ki, burada *a* ve *b* noktaları arasındaki *E(t)* gerilimi sinüsoidal olarak değişmektedir. Gerilimin maksimum değeri E_0 'dir, ω sabittir. Herhangi bir *t* anında devreden geçen akım şiddeti *I* 'nın diferansiyel denklemi,



Şekil 12

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon_0 \cos \omega t \tag{62}$$

dır. İntegrasyon çarpanı ile çözüm bulunursa,

$$I e^{Rt/L} = \frac{\varepsilon_0}{L}\int e^{Rt/L} \cos \omega t \, dt + c \tag{63}$$

olur. Burada integralin değeri,

$$\int e^{Rt/L} \cos \omega t \, dt = e^{Rt/L}\left(\frac{Rt}{L}\cos \omega t + \omega \sin \omega t\right)\left(\frac{R^2 t^2}{L^2} + \omega^2\right)$$

dır. İntegralin bu değeri Denk. 63 'de yerine konursa,

$$I e^{Rt/L} = \frac{e^{Rt/L}\,\varepsilon_0}{R^2 + \omega^2 L^2}\,(R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t) + c \tag{64}$$

bulunur. Başlangıç koşulu olarak $t = 0$ için $I = 0$ kabul edilirse, c integrasyon sabitinin değeri,

$$c = -\frac{R\mathcal{E}_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

bulunur. Bu değer, (64) denkleminde yerine konur,

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)}}\left[\cos(\omega t - \alpha) - e^{-Rt/L}\cos\alpha\right]$$

elde edilir. Burada $tan\alpha = \omega L/R$ 'dir.

ALIŞTIRMALAR

1. Elektromotor kuvveti $\mathcal{E} = 50$ volt olan bir üreteç, $R = 5\ \Omega$ 'luk bir direnç teli ve $L = 2$ H olan bir bobinle seri olarak bağlıdır. Devrenin kapandığı an $t = 0$ anı olarak kabul edilirse, herhangi bir t anında akım şiddetini bulunuz.

2. Prob. 1'de doğru akım üreteci yerine emf'si 30 sin 4 t olan bir üreteç bağlanırsa, akım şiddeti zamana bağlı olarak nasıl değişir?

3. $6\ \Omega$ 'luk bir direnç teli, $L = 1$ H'lik bir bobinle ve emf'si $10\, e^{-2t} \cos 5t$ olan bir üreteçle seri olarak bağlanıyor. $t = 0$ iken $I = 0$ ise $I = f(t)$ fonksiyonunu bulunuz.

4. $R = 20\ \Omega$ 'luk bir direnç teli, $C = 0{,}01$ F 'lık bir kondansatör $e = 40\, e^{-2t} + 20\, e^{-4t}$ olan bir üretece seri olarak bağlanıyor. $t = 0$ iken kondansatörün yükü $Q = 0$ ise, herhangibir anda kondansatörün yükü ne olur?

5. Bir RL elektrik devresinde $L = 10$ H, $R = 100\ \Omega$ ve $\mathcal{E} = 10$ volt'dır. Anahtar kapandığında $t = 0$ anında $I = 0$ kabul ediliyor. (a) t'ye bağlı olarak I 'nın değerini ve (b) I_{max} değerini bulunuz.

6. Bir RC devresinde $R = 10\ \Omega$, $C = 0{,}002$ F ve $\mathcal{E}(t) = 4 \cos 314\, t$ olarak veriliyor. $t = 0$ için $I = 0$ kabul edilirse, (a) $I = f(t)$ fonksiyonunu, (b) $q = q(t)$ fonksiyonunu ve (c) I_{max} değerini bulunuz.

7. Bir RC devresinde $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{\alpha t}$ fonksiyonu ile verilmiştir. Devreden geçen akım şiddeti

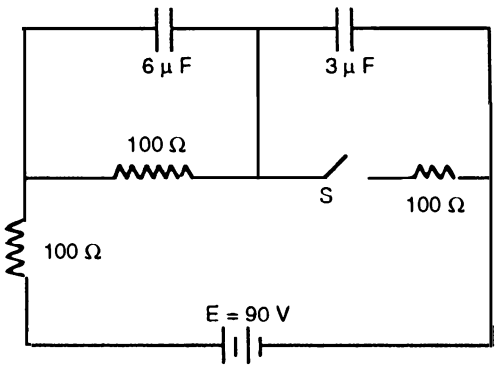
$$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

diferansiyel denklemini sağlamaktadır. Zamana bağlı olarak devreden geçen akım şiddetinin,

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 e^{\alpha t}}{R + \frac{1}{C}} + k\, e^{-t/RC}$$ olduğunu gösteriniz.

8. Bir RL akım devresinde üreteç yoktur. Fakat, t = 0 anında devreden I_0 şiddetinde bir akım geçmektedir. Herhangi bir t anında devreden geçmekte olan I (t) akım şiddetini bulunuz.

9. Aşağıda Şek. 12'de verilen devrede S anahtarının kapandığı andan itibaren bir süre sonra kondansatörlerin herbirinin yükünü hesaplayınız. S anahtarı aniden açıldığında kısa süre sonra üreteç üzerinden geçen akım şiddeti nasıl değişir?



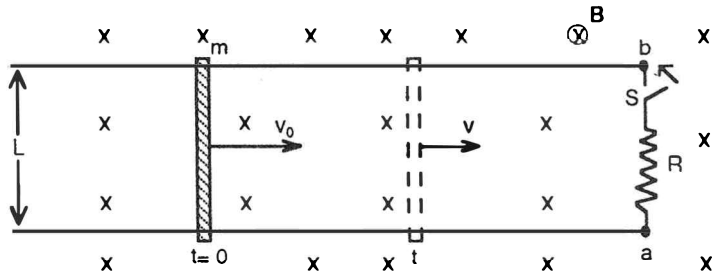
Şekil 13

10. Yarıçapları 20 cm ve 50 cm olan iki metal küreden birincisi 3.0×10^{-6} C ve ikincisi 2.0×10^{-5} C pozitif yükle yüklüdür. Metal küreler birbirine dokundurulduktan çok kısa zaman sonra her birinin yükünü t'ye bağlı olarak bulunuz. Bir süre sonra metal kürelerin her birinin yükü ne olur?

3-6 ELEKTROMAGNETİK-İNDÜKSİYON PROBLEMLERİ

Kapalı bir devreden geçmekte olan magnetik kuvvet çizgilerinin sayısında birim zaman içinde aynı miktarda azalma veya aynı miktarda çoğalma olduğu zaman, Faraday Kanununa göre, kapalı devre içinde sabit bir indüksiyon elektromotor kuvveti (emf) ve buna bağlı olarak sabit bir indüksiyon akımı oluşur. Bazı problemlerde ise, devreden geçen indüksiyon akımının şiddeti zamana bağlı olarak değişim gösterir. Böyle durumlarda, problemin çözümü ile uğraşırken karşımıza birinci mertebeden ve bazan da ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler çıkar. Başlangıç şartları kullanılarak bu diferansiyel denklemler çözülür ve böylece problem içindeki sorular yanıtlanmış olur.

Örnek 1. Kütlesi m ve boyu L olan düzgün bir bakır çubuk, yatay bir düzlem üzerinde bulunan, biribirine paralel ve oldukça uzun iki iletken çubuk üzerinde sürtünmesiz olarak kayabilmektedir. Sistem, düşey doğrultuda ve yönü aşağı doğru olan düzgün bir magnetik alan içindedir. Bir R direnç teli S anahtarı yardımı ile paralel iletken çubukların *a* ve *b* uçlarına bağlıdır (Şekil 14). Anahtar açık iken bakır



Şekil 14

çubuk, bir dış kuvvet yardımı ile, hızı v_o oluncaya kadar itilmektedir. Tam bu anda dış kuvvet sıfırlanmakta ve anahtar da aniden kapatılmaktadır. Buna göre, (a) çubuğun bundan sonraki hızını ve (b) devreden geçen akım şiddetini zamana bağlı olarak bulunuz.

Dış kuvvetin ortadan kaldırıldığı ve anahtarın kapatıldığı an, $t = 0$ başlangıç anı olsun. t anında çubuğun hızı v ve devreden geçen indüksiyon akım şiddeti I ise

$$\mathcal{E} = L\,v\,B \qquad \text{ve} \qquad I = \frac{L\,v\,B}{R}$$

olduğundan, çubuğun hareket yönünün aksi yönde etki eden elektromagnetik

kuvvet

$$F_m = I\,L\,B = \frac{L\,v\,B}{R} \times L\,B = \frac{L^2 B^2}{R} v$$

olur. Bu durumda çubuğun hareket denklemi

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{L^2 B^2}{R} v$$

veya

$$m\frac{dv}{dt} + \frac{L^2 B^2}{R} v = 0$$

olur. Yukarıdaki denklem, birinci mertebeden sabit katsayılı bir adi diferansiyel denklemdir.

$$\frac{dv}{v} = -\frac{L^2 B^2}{mR} dt$$

$$\ln v = -\frac{L^2 B^2}{mR} t + C$$

$t = 0$ anında çubuğun hızı v_0 olduğundan, C integrasyon sabiti için

$$C = \ln v_o$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde yerine konulduğunda

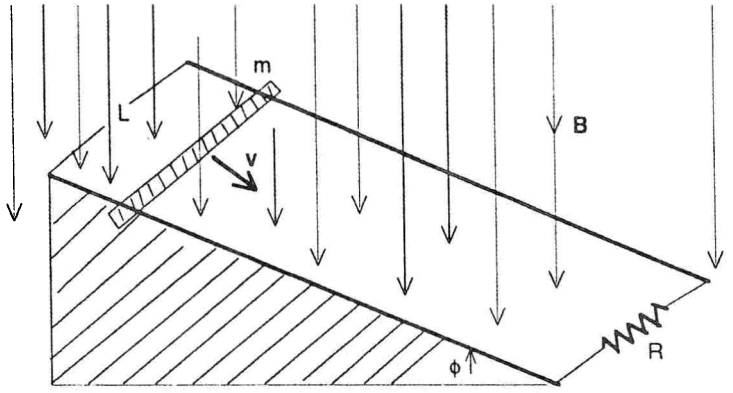
$$v = v_o e^{-\frac{L^2 B^2}{mR} t}$$

elde edilir. Bu anda devreden geçen akım şiddeti

$$I = \frac{L\,B}{R} v = \frac{L\,B\,v_o}{R} e^{-\frac{L^2 B^2}{m\,R} t}$$

olur.

Örnek 2. Kütlesi m ve boyu L olan bir iletken çubuk, yatayla θ açısı yapan bir eğik düzlem üzerinde bulunan iki uzun, paralel iletken çubuk üzerinde sürtünmesiz olarak kayabilmektedir. Çubukların uçları aşağıda bir R direnç teli ile birleştirilmiştir. Sistem, düşey doğrultuda aşağı doğru yönlenmiş düzgün bir **B** magnetik alanı içindedir (Şekil 15). (a) Çubuğun limit hıza ulaşmadan önceki hızını zamana bağlı olarak bulunuz. (b) limit hızın değerini bulunuz. (c) çubuk limit hıza ulaştıktan sonra devreden geçen akım şiddetini bulunuz.



Şekil 15

a) Limit hız öncesi çubuğun hareket denklemi

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \phi - ILB \cos \phi$$

Burada $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{vLB}{R} \cos \phi$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{L^2 B^2 \cos^2 \phi}{m R} v = g \sin \phi$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Burada, $\frac{L^2 B^2 \cos^2 \phi}{m R} = a$ ve $g \sin \phi = b$ ile gösterilirse, yukarıdaki diferansiyel denklem aşağıdaki şekli alır.

$$\frac{dv}{dt} + av = b \quad \text{veya} \quad \frac{dv}{b - av} = dt$$

yazılır. Her iki tarafında integrali alındığında

$$-\frac{1}{a}\ln(b - av) = t + C$$

elde edilir. $t = 0$ anında çubuk serbest bırakıldığına göre

$$C = -\frac{1}{a}\ln b$$

bulunur. Denklemde yerine konursa,

$$-\frac{1}{a}\ln(b - av) = t - \frac{1}{a}\ln b$$

$$\ln\frac{b}{b - av} = at$$

$$v = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$

b) $t = \infty$ olduğunda v hızı da limit değerine yaklaşacağından

$$v_L = \frac{b}{a} = \frac{mgR\sin\phi}{(LB\cos\phi)^2}$$

elde edilir.

c) $$I = \frac{LB\cos\phi}{R} \times \frac{mgR\sin\phi}{L^2B^2\cos^2\phi}$$

$$= \frac{mg}{LB}\tan\phi$$

Örnek 3. Şekil 16'da görüldüğü üzere, atnalı şeklindeki bir mıknatısın kutupları arasındaki düzgün magnetik alanın dik kesiti, bir kenarı L olan bir kare şeklindedir. Kütlesi m, direnci R ve bir kenarının uzunluğu L olan kare şeklindeki bir iletken çerçeve, başlangıç anında, tüm magnetik kuvvet çizgileri çerçeve düzlemini dik olarak geçecek şekilde ilk hızsız olarak kutuplar arasında serbest düşmeye bırakılmıştır. Tel çerçevenin, mıknatısın kutupları arasında ulaşacağı limit hızı bulunuz.

Çerçeve $t = 0$ anında serbest düşmeye bırakıldığı andan itibaren, çerçevenin AB kenarı magnetik kuvvet çizgilerini dik olarak keseceğinden çerçeveden indüksiyon akımı geçecek ve çerçeve yukarıya doğru bir elektromagnetik kuvvetin etkisine maruz kalacaktır. Buna göre, t anında çerçevenin hareket denklemi,

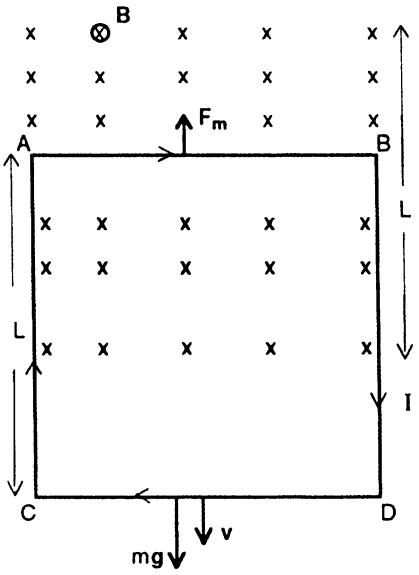
$$m\frac{dv}{dt} = mg - ILB \qquad (65)$$

Diğer taraftan, çerçevenin aşağı doğru y-ekseni doğrultusunda düştüğü gözönüne alınarak,

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -B\frac{dA}{dt} = BL\frac{dy}{dt}$$

Görülüyor ki, çerçeve kapalı devresinde oluşan ε indüksiyon *emf* ve ona bağlı olarak I indüksiyon akımı zamana bağlı olarak değişmektedir. $v = dy/dt$, çubuğun t anındaki ani hızını göstermek üzere

$$\varepsilon = IR = BLv \Rightarrow I = \frac{BLv}{R}$$ bulunur.



Şekil 16

Bu değer Denk. 65'de yerine konulursa,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{B^2L^2}{R}v$$

veya

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{B^2L^2}{mR}v$$

elde edilir. Burada $a = \frac{B^2L^2}{mR}$ ile gösterilirse

$$\int \frac{dv}{g - av} = \int dt$$

$$-\frac{1}{a}\ln(g - av) = t + C$$

Burada $C = -\frac{1}{a}\ln g$ olduğundan

$$\frac{1}{a}\ln\frac{g}{g - av} = t \Rightarrow v = \frac{g}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$$

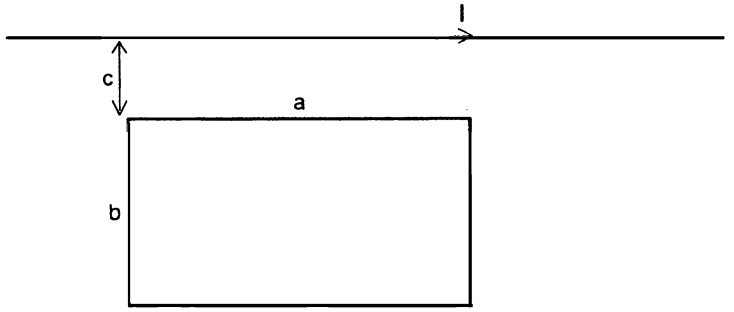
bulunur. t sonsuza yaklaştığında v de limit değerine yaklaşacağından

$$v_L = \frac{g}{a} = \frac{mgR}{B^2L^2}$$

bulunur.

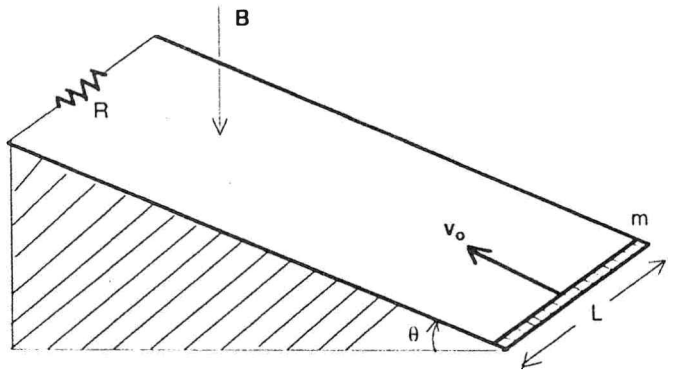
ALIŞTIRMALAR

1. Yatay, uzun ve doğru bir iletken telden sabit I şiddetinde bir akım geçmektedir. Bu telden c uzaklığında bulunan, kütlesi m, direnci R ve boyutları a ve b olan dikdörtgen şeklinde bir iletken tel ilk hızsız olarak serbest düşmeye bırakılıyor (Şekil 17). Sabit duran yatay tel ve çerçeve aynı düşey düzlem içinde bulunmaktadır. Çerçevenin limit hızını bulunuz.



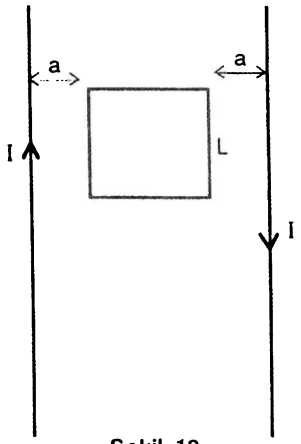
Şekil 17

2. Yatayla θ açısı yapan bir eğik düzlem üzerinde bulunan iki paralel iletken telin birer ucu, direnci R olan bir lambaya bağlıdır. Kütlesi m ve boyu L olan bir iletken çubuk, eğik düzlem boyunca v_o ilk hızı ile yukarı doğru fırlatılıyor (Şekil 18). Sürtünme olmadığına göre, çubuğun hızını zamana bağlı olarak bulunuz.



Şekil 18

3. Sonsuz uzun, paralel ve doğru iki iletken telin herbirinden I şiddetinde ve zıt yönde akım geçmektedir. Kütlesi m, direnci R ve bir kenarının uzunluğu L olan kare şeklinde bir iletken çerçeve ilk hızsız olarak serbest düşmeye bırakılmıştır (Şekil 19). Tellerin hepsi de aynı düşey düzlem içinde bulunmaktadır. Çerçevenin limit hızını bulunuz.



Şekil 19

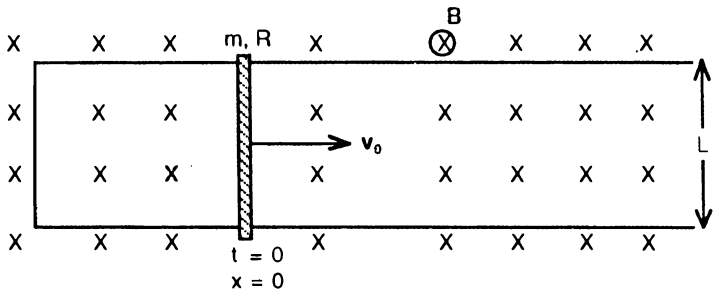
4. U şeklinde bir bakır çubuk yatay ve yalıtkan bir düzlem üzerinde bulunmaktadır. Çubuk, düşey doğrultuda ve aşağı doğru yönlendirilmiş düzgün bir **B** magnetik alanı içindedir. Kütlesi m, boyu L ve direnci R olan bir iletken çubuk, U teli üzerinde sürtünmesiz olarak hareket edebilmektedir. Şekil 20'de görüldüğü üzere, çubuk v_o hızını kazanıncaya kadar itilmekte, sonra serbest bırakılmaktadır.

a) Bir süre sonra çubuk v hızı ile hareket ederken çubuğa etki etmekte olan elektromagnetik kuvvetin değerini bulunuz.

Başlangıç anından itibaren çubuk,

b) ne kadar zaman sonra ve

c) ne kadar uzakta durur?



Şekil 20

BÖLÜM 4

Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

4-1 GİRİŞ

n 'inci mertebeden homogen olmayan bir lineer diferansiyel denklem genel olarak

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)\,y = F(x) \qquad (1)$$

şeklinde yazılır. Burada $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ değişken katsayılardır. Bu katsayılar ve $F(x)$ fonksiyonu, x'in bir $I = [a, b]$ aralığında tarif edilmiş sürekli fonksiyonlarıdır. Ayrıca, $a_0(x)$ bu aralıkta daima sıfırdan farklıdır.

Eğer, $F(x) = 0$ ise, (1) denklemi

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)\,y = 0 \qquad (2)$$

şeklini alır. O zaman bu denkleme, **n 'inci mertebeden değişken katsayılı homogen lineer diferansiyel denklem** denir.

Lineer diferansiyel denklemlerin çalışılmasında, "operatör" adı verilen D, D^2, D^3, ... gibi sembollerin kullanılması pratik bakımdan büyük yarar sağlamaktadır. Eğer, bir D diferansiyel operatörü x'e göre birinci türev anlamına geliyorsa y'nin x'e göre türevi, $dy/dx = Dy$ şeklinde yazılır. Burada, $D = d/dx$'dır. Aynı şekilde, y'nin x'e göre ikinci türevi D^2y, üçüncü türevi D^3y ve n'inci türevi D^ny şeklinde ifade edilir.

Bazı diferansiyel ifadelerin operatör kullanılarak kısaca nasıl yazılabileceği aşağıdaki örneklerde açıkça gösterilmiştir.

(i) $\frac{dy}{dx} + ay = (D + a)\, y$

(ii) $b\frac{dy}{dx} = bDy$

(iii) $c\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = (cD^2 + xD)\, y$

Burada, *a*, *b* ve *c* herhangi sabit sayılardır.

Değişken katsayılar yerine sabit katsayılar gözönüne alınırsa, o zaman Denk. 1, operatör kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$(a_0D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n)\, y = F(x) \qquad (3)$$

Burada a_0D^n, a_1D^{n-1}, ... ayrı ayrı birer operatör olduğu gibi parantez içi de tümden n'inci dereceden sabit katsayılı bir "polinom operatörü" dür. Bu operatörü *f (D)* ile gösterirsek, Denk. 3 kısaca,

$$f(D)y = F(x) \qquad (4)$$

şeklinde yazılır. f (D) operatörünü bu defa L operatörü ile temsil edersek yukarıdaki denklem

$$Ly = F(x)$$

şeklini alır.

Bir polinom operatör, aynen cebirsel sayılarda olduğu gibi çarpanlara ayrılabilir. Örneğin,

$$9\frac{d^2y}{dx^2} - y = \sin x$$

$$(9D^2 - 1)y = \sin x$$

$$(3D + 1)\,(3D - 1)y = \sin x$$

şeklinde yazılır. Bunun anlamı *y* 'ye önce *(3D −1)* operatörü uygulanacak ve böylece bulunacak olan ifadeye de *(3D + 1)* operatörü uygulanacak demektir. Burada çarpım şeklindeki operatörlerden önce *y* 'ye hangisinin uygulanacağı hiç önemli değildir.

Operatörlerle ilgili bazı özellikleri burada kısaca hatırlatmakta yarar vardır.

A, B ve C herhangi diferansiyel operatörleri göstermek üzere bu özelliklerin başlıcaları şunlardır.

(1) Toplamanın komitatif özelliği, $A + B = B + A$

(2) Toplamanın asosiyatif özelliği, $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) Çarpmanın asosiyatif özelliği, $(AB)C = A(BC)$

(4) Çarpmanın distributif özelliği, $A(B + C) = AB + AC$

(5) Çarpmanın komitatif özelliği (A ve B sabit katsayılı operatörler olmak üzere),

$$AB = BA$$

şeklinde ifade edilebilir. $L_1, L_2, \ldots, L_n$ sabit katsayılı operatörleri göstermek üzere, çarpmanın komitatif özelliği daha genel olarak,

$$L = L_1 L_2 \ldots L_{i-1} L_i L_{i+1} \ldots L_n = L_1 L_2 \ldots L_{i-1} L_{i+1} \ldots L_n L_i$$

şeklinde gösterilebilir.

Diferansiyel denklemlerin incelenmesinde ve çözümlerin bulunmasında lineer diferansiyel operatörlerin kullanılması birçok yönden büyük yarar sağlamaktadır. Bu nedenle gerektiği her yerde operatör kullanımına ağırlık verilecektir.

4-2 LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TEMEL TEOREMİ

Homogen olmayan n'inci mertebeden değişken katsayılı bir lineer diferansiyel denklemin, yani Denk. 1 'in genel çözümünü bulmak amacımızdır. Bunun için önce aşağıdaki denklemin "tek çözüm teoremi", sonra (2) numaralı homogen diferansiyel denklemin genel çözümünün bulunması incelenecektir.

Birinci mertebeden diferansiyel denklemlerde tek çözüm teoremi Bölüm 1 'de incelenmiştir. Aynı teorem gene ispatı verilmeksizin; n'inci mertebeden bir lineer diferansiyel denkleme kolayca uygulanabilir.

(1) nolu diferansiyel denklemi operatör yardımıyla tekrar yazalım.

$$[a_0(x) D^n + a_1(x) D^{n-1} + \ldots + a_n(x)]\, y = F(x)$$

olur. Burada $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ ve $F(x)$, bir $a \leq x \leq b$ aralığında tarif edilmiş sürekli fonksiyonlardır ve x 'in bu aralıktaki her değeri için $a_0(x) \neq 0$ 'dır. Bu durumda, Denk. 1 'i sağlayan bir $y(x)$ çözümü vardır; öyle ki, x_0 bu $[a, b]$ aralığının bir elemanı olmak üzere,

$$y(x_0) = c_0,\ y'(x_0) = c,\ \ldots,\ y^{n-1}(x_0) = c_{n-1}$$

yazılabilir. Burada, $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ herhangi keyfi sabit sayılardır. Ayrıca ifade ede-

lim ki, x'in bu aralıkta x_0 değerini alması halinde y de, $y_0 = y(x_0)$ değerini alır ve (x_0, y_0) komşuluğunda şartları sağlayan tek fonksiyon y = y (x) fonksiyonudur.

Şimdi, (2) nolu homogen lineer diferansiyel denklemi gözönüne alalım ve bu denklemin genel çözümünü bulabilmek için "lineer bağımlılık" ve "lineer bağımsızlık" gibi kavramları ve bunlarla ilgili bir dizi tanım ve teoremi kısaca gözden geçirelim.

Teorem 1. n 'inci mertebeden bir homogen diferansiyel denklemin birbirinden farklı m sayıda çözümü $y_1, y_2, ..., y_m$ olsun. Burada $m \leq n$ 'dır. Bu durumda, $c_1, c_2, ..., c_m$ katsayıları keyfi sabit sayılar olmak üzere, $y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_my_m$ fonksiyonu da aynı denklemin bir çözümü olur.

Bu teoremi ispatlamadan önce aşağıdaki tarifi gözönüne alalım.

Tanım: $y_1, y_2, ... y_m$ herhangi m fonksiyon ve $c_1, c_2, ..., c_m$ herhangi keyfi sabit sayılar olsunlar. Bu durumda, $c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_my_m$ ifadesine, $y_1, y_2, ..., y_m$ fonksiyonlarının **lineer kombinasyonu** denir.

Bu tariften yararlanarak, Teorem I tekrar ve aşağıdaki şekilde ifade edilebilir: "Bir lineer homogen diferansiyel denklemin çözümlerinin lineer kombinasyonu da bir çözümdür." Bu teorem, lineer homogen diferansiyel denklemlerin temel teoremi'dir.

Teorem I 'i ispat etmek için,

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = 0 \qquad (5)$$

denklemini gözönüne alalım. Burada $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ katsayıları değişken veya sabit sayılardır. (5) nolu homogen diferansiyel denkleminin n sayıdaki çözümleri arasından önce herhangi iki y_1 ve y_2 çözümünü gözönüne alalım. Bu iki çözümün lineer kombinasyonu olan

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \qquad (6)$$

fonksiyonunun da aynı denklemin bir çözümü olduğunu gösterirsek, yukarıda ifade edilen temel teorem bir ölçüde ispatlanmış olacaktır.

y_1 ve y_2 verilen diferansiyel denklemin birer çözümü olduğu için,

$$a_0\frac{d^ny_1}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}\frac{dy_1}{dx} + a_ny_1 = 0 \qquad (7)$$

ve

$$a_0\frac{d^n y_2}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-2}\frac{dy_2}{dx} + a_n y_2 = 0 \qquad (8)$$

yazılabilir. Şimdi, (7) denkleminin bütün terimleri c_1 ile ve (8) denkleminin bütün terimleri de c_2 ile çarpılarak taraf tarafa toplanırsa,

$$a_0\left(c_1\frac{d^n y_1}{dx^n} + c_2\frac{d^n y_2}{dx^n}\right) + a_1\left(c_1\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + c_2\frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}}\right) + \ldots$$

$$+ a_{n-1}\left(c_1\frac{dy_1}{dx} + c_2\frac{dy_2}{dx}\right) + a_n\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right) = 0 \qquad (9)$$

elde edilir. Diğer taraftan, yukarıda Denk. 9 'un terimlerinin herbiri

$$c_1\frac{dy_1}{dx} + c_2\frac{dy_2}{dx} = \frac{d}{dx}\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right),$$

$$c_1\frac{d^2 y_1}{dx^2} + c_2\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right), \ldots \text{ v.s.}$$

olduğundan, (9) denklemi açıkça göstermektedir ki,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

fonksiyonu (2) nolu diferansiyel denklemin bir çözümüdür.

Aynı şekilde veya iterasyon tekniği kullanılarak kolayca gösterilebilir ki, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nin herbiri bir çözümse, bunların lineer kombinasyonu olan

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

fonksiyonu da bir çözümdür. Böylece n 'inci mertebeden lineer homogen diferansiyel denklemin genel çözümünü veren temel teorem ispatlanmış olmaktadır.

Tanım: Bir $a \le x \le b$ aralığında tarif edilmiş olan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyon kümesi için, hepsi sıfır olmayan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ gibi sabit sayılar bulunabilirse ve x 'in bu aralıktaki bütün değerleri için,

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0 \qquad (10)$$

ise, bu fonksiyonlara aralarında **lineer bağımlı fonksiyonlar** denir. *[a, b]* aralığında lineer bağımlı olmayan fonksiyonlara ise, **lineer bağımsız fonksiyonlar** denir.

Örnek olarak, *sin x* ve *sin 2x* gibi iki fonksiyonu ele alalım. c_1 ve c_2 her ikisi birden sıfıra eşit olmayan iki sabit sayı olmak üzere

$$c_1 \sin x + c_2 \sin 2x = 0 \tag{11}$$

olduğunu kabul edelim. O zaman, *sin x* ve *sin 2x* lineer bağımlı fonksiyonlar olurdu. Fakat bu mümkün değildir. Çünkü yukarıdaki denklem,

$$c_2 \cos x = -c_1$$

şeklinde yazılırsa, bu son eşitliğin doğru olabilmesi için her iki sabit sayının da sıfıra eşit olması gerekir. Öyle ise, yukarıda verilen *sin x* ve *sin 2x* fonksiyonları aralarında lineer bağımsız fonksiyonlardır.

Bir başka örnek,

$$y_1(x) = e^{2x} + 2e^{x}, \quad y_2(x) = 5e^{2x} + 4e^{x}, \quad y_3(x) = e^{x} - e^{2x}$$

fonksiyon kümesini gözönüne alalım. Eğer, hepsi de sıfır olmayacak şekilde c_1, c_2 ve c_3 gibi üç sabit sayı bulunabilirse ve bu durumda,

$$c_1\left(e^{2x} + 2e^{x}\right) + c_2\left(5e^{2x} + 4e^{x}\right) + c_3\left(e^{x} - e^{2x}\right) = 0 \tag{12}$$

ise, o zaman bu üç fonksiyon aralarında lineer bağımlı olur. Evet, böyle üç sabit sayı bulunabilir ve $c_1 = 3$, $c_2 = -1$ ve $c_3 = -2$ için (12) nolu denklem sağlanır. Bu nedenle yukarıda verilen üç fonksiyon lineer bağımlıdır.

Şimdi, iki veya daha fazla fonksiyonun hangi koşullarda lineer bağımlı veya lineer bağımsız olduğunu araştıralım.

Kabul edelim ki, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ bir $a \le x \le b$ aralığında lineer bağımlı iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0 \tag{13}$$

yazılır. Bu aralıkta fonksiyonların herbirinin türevi tarif edilmiş olacağından,

$$c_1 y_1' + c_2 y_2' = 0 \tag{14}$$

olur. (13) denklemi y_2' ile ve (14) denklemi de y_2 ile çarpılır ve bunlar birbirinden çıkartılırsa,

$$c_1 (y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0 \tag{15}$$

elde edilir. Şimdi de, (13) denklemini y_1' ile ve (14) denklemini de y_1 ile çarpar ve birbirinden çıkartırsak,

$$c_2 (y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0 \tag{16}$$

bulunur. Burada açıkça görülmektedir ki, c_1 ve c_2 den ikisi de sıfır olmadan (15) ve (16) nolu denklemlerin sağlanması için,

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

olmalıdır. Bu demektir ki, yukarıdaki determinantın sıfıra eşit olması durumunda y_1 ve y_2 lineer bağımlı iki fonksiyon olur.

Genel olarak, yukarıdaki determinant W harfi ile gösterilir ve "Wronskian" adını alır. Buna göre, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gibi n tane fonksiyon verildiğinde eğer,

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (18)$$

ise, bu fonksiyonların kendi aralarında lineer bağımsız oldukları anlaşılmış olur. n 'inci mertebeden bir lineer homogen diferansiyel denklemin genel çözümü ile ilgili olan ve yukarıda verilmiş olan temel teorem, şimdi en genel şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

"Eğer, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonlarının herbiri Denk. 2 'nin birer çözümü ve bu fonksiyonlar aynı zamanda kendi aralarında lineer bağımsız iseler, bunların lineer kombinasyonu olan

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \qquad (19)$$

fonksiyonu da aynı denklemin bir çözümüdür." Bu şekilde tarif edilen fonksiyona homogen denklemin **genel çözümü** denir ve y_c ile gösterilir.

Yüksek mertebeden değişken katsayılı veya sabit katsayılı bir diferansiyel denklemin lineer bağımsız tüm özel çözümlerini hemen bulmak bazen kolay olmayabilir. Bu durumda, eğer diferansiyel denklemin özel çözümlerinden bir tanesi biliniyorsa, bu özel çözüm yardımıyla ve aşağıda gösterildiği şekilde diferansiyel denklemin mertebesi her defasında bir derece düşürülerek diğer özel çözümleri de bulunabilir.

Örnek olarak, aşağıda verilen ikinci mertebeden sabit katsayılı bir homogen lineer diferansiyel denklemi gözönüne alalım.

$$a_0 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0 \qquad (20)$$

$y = f(x)$ bu denklemin bilinen bir çözümü olsun. Bu durumda,

$$y = v(x) \cdot f(x) \qquad (21)$$

transformasyonu bu diferansiyel denklemin mertebesini bir derece düşürecektir. Şöyle ki, y'nin bu değeri, verilen diferansiyel denklemde yerine konursa,

$$a_0 f(x) \frac{du}{dx} + \left[2a_0 f'(x) + a_1 f(x)\right] u = 0 \qquad (22)$$

elde edilir. Burada $u = dv/dx$'dır. (22) denklemi kolaylıkla çözülür ve

$$u(x) = \frac{\exp\left(-\int \frac{a_1}{a_0} dx\right)}{[f(x)]^2}$$

$$v(x) = \int \frac{\exp\left(-\int \frac{a_1}{a_0} dx\right)}{[f(x)]^2} dx$$

elde edilir. $v(x)$'ın bu değeri Denk. 21'de yerine konursa yeni bir fonksiyon, $g(x) = v(x) \cdot f(x)$ fonksiyonu elde edilir. Böylece bulunan g (x) fonksiyonu da şüphesiz diferansiyel denklemin bir diğer özel çözümüdür. Öyle ise, Denk. 20'nin genel çözümü,

$$y_c = c_1 f(x) + c_2 g(x) \qquad (23)$$

olur.

Şimdi tekrar baş tarafa geri dönelim. Yukarıdaki örnekte görüldüğü ve ileride ayrıntılı şekilde tekrar ele alınacağı üzere, değişik yöntemler uygulayarak Denk. 2 'nin genel çözümü y_c bulunabilmektedir. Oysa amacımız sadece Denk. 2 'nin genel çözümünü bulmak değil, Denk. 1 'in genel çözümünü bulmaktır. Bunun için değişik metotlar geliştirilmiş ve böylece Denk. 1 'in bir özel çözümü olan y_p bulunabilmiştir. Ayrıca ifade edelim ki, y_c çözümü Denk. 2 'nin mertebesine eşit sayıda keyfi sabit sayı içerdiği halde, y_p çözümü herhangi bir sabit sayı içermemektedir.

Teori ve uygulamalar açıkça göstermektedir ki, y_c ve y_p'nin toplamı olan

$$y = y_c + y_p \qquad (24)$$

fonksiyonu da Denk. 1 'in bir çözümüdür ve bu çözüme adı geçen denklemin genel çözümü denir.

Öyle ise, homogen olmayan bir diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmak için önce denklemin homogen kısmının y_c genel çözümünü bulmak, sonra denklemin y_p özel çözümünü bulmak ve sonunda bunları Denk. 24'de yerlerine koymak gerekmektedir.

4-3 SABİT KATSAYILI HOMOGEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

İkinci veya daha yüksek mertebeden sabit katsayılı homogen lineer diferansiyel denklemler uygulamada çok sık rastlanan denklemlerdir. Aşağıda görüleceği gibi bu denklemlerin genel çözümünü bulmak oldukça kolaydır.

Daha önce de birkaç kez değindiğimiz gibi, n'inci mertebeden sabit katsayılı bir homogen lineer diferansiyel denklem,

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \qquad (25)$$

şeklinde yazılır. Burada $a_0 \neq 0$ dır.

Açıkça görülmektedir ki, bir fonksiyonun yukarıdaki diferansiyel denklemin bir çözümü olabilmesi için, bu fonksiyon ile fonksiyonun türevleri arasında katsayı farkı dışında bir fark olmaması gerekir. Bu özelliğe sahip fonksiyonlar e^{mx}, $\sin \alpha x$ ve $\cos \beta x$ gibi fonksiyonlardır. Bunlardan $\sin \alpha x$ ve $\cos \beta x$ fonksiyonları bir kompleks üstel fonksiyonun kombinasyonları olduğundan, bu fonksiyonları, e^{mx} fonksiyonundan farklı fonksiyonlarmış gibi gözönüne almak yanlış olur. Öyle ise,

$$y = e^{mx} \qquad (26)$$

fonksiyonunun, (25) nolu lineer homogen diferansiyel denklemin bir çözümü olması olasılığı mevcuttur. Burada m, reel veya kompleks herhangi bir sayıdır.

Eğer, (26) fonksiyonu diferansiyel denklemin bir çözümü ise denklemi sağlamak durumundadır. Buna göre,

$$y = e^{mx}$$

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

.....

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m^n e^{mx}$$

olduğundan, bu değerler Denk. 25 'de yerlerine konursa,

$$e^{mx}(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots + a_{n-1} m + a_n) = 0$$

ve buradan da,

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots + a_{n-1} m + a_n = 0 \qquad (27)$$

elde edilir. Denk. 27 'ye diferansiyel denklemin karakteristik denklemi denir. Bu denklem n'inci dereceden bir cebirsel denklem olduğuna göre, denklemin $m_1, m_2, \ldots m_n$ gibi n tane kökü olmalıdır. Bu kökler birer birer Denk. 26'da yerine konursa her defasında bir özel çözüm elde edilecektir. Böylece her kök için bir özel çözüm bulunacağından n kök için n sayıda özel çözüm bulunmuş olur. Bu n fonksiyonun Wronskian'ı hesaplanacak olursa, bunların lineer bağımsız fonksiyonlar olduğu kolayca görülecektir. Bu durumda bunların lineer kombinasyonu olan

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_{n-1} e^{m_{n-1} x} + c_n e^{m_n x} \qquad (28)$$

fonksiyonu da (25) nolu diferansiyel denklemin genel çözümünü verir. Burada $c_1, c_2, \ldots c_n$ keyfi sabit sayılardır.

Örnek 1. $ay'' + by' + cy = 0$ (29)

denklemini çözünüz.

Burada a, b, c reel sayılardır. Önce verilen denklemin karakteristik denklemini yazalım.

$$am^2 + bm + c = 0$$

Bu denklem, ikinci dereceden bir cebirsel denklemdir ve kökleri,

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dır. Burada diskriminant $(\Delta = b^2 - 4ac)$ 'ın alacağı üç farklı değere göre kökler reel veya kompleks olabilir. Δ 'nın alabileceği değerler, sıra ile şunlardır:

I. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Bu durumda kökler reel ve birbirinden farklıdır $(m_1 \neq m_2)$ ve diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$ olur.

II. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Bu durumda ise kökler reel ve birbirine eşittir $(m_1 = m_2)$. Bu değerleri Denk. 28 'de yerine koyarsak diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmuş olamayız. Çünkü, o zaman genel çözüm bir tek sabit sayı ihtiva eder ki bu mümkün değildir. Burada genel çözüm aşağıdaki şekilde bulunur.

Ortak kökü m ile gösterelim. O zaman şüphesiz $y = e^{mx}$ bir çözümdür. Bunun bir sabit sayı ile çarpımı da bir çözümdür. Burada amacımız diğer çözümü de bularak ikinci mertebeden diferansiyel denklemi sağlayan ve aralarında lineer bağımsız olan iki çözüm bulmaktır.

Diferansiyel denklemin bir özel çözümü $y = exp\,(mx)$ bilindiğine göre yukarıda görüldüğü şekilde denklemin mertebesi bir derece düşürülerek diğer özel çözüm bulunur. Buna göre,

$$y = v\,(x)\,.\,e^{mx} \tag{30}$$

değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$y' = v''e^{mx} + mve^{mx}$$

$$y'' = v''e^{mx} + 2mv'e^{mx} + m^2ve^{mx}$$

elde edilir. Bu değerler Denk. 29'da yerlerine konursa,

$$a\,(v''e^{mx} + 2mv'e^{mx} + m^2\,ve^{mx}) + b\,(v'e^{mx} + mve^{mx}) + cve^{mx} = 0$$

$$av'' + (2am + b)v' + (am^2 + bm + c)v = 0$$

olur. Burada m, karakteristik denklemin bir kökü olduğu için yukarıdaki son denklemde ikinci ve üçüncü terimler sıfıra eşit olur. O zaman, (29) nolu diferansiyel denklem,

$$v' = 0$$

şekline dönüşür. Bu denklem çözülürse,

$$v = c_1 + c_2x \tag{31}$$

elde edilir. v'nin bu değeri Denk. 30'da yerine konursa,

$$y = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx} \tag{32}$$

elde edilir. Burada e^{mx} ve xe^{mx} fonksiyonları lineer bağımsız olduklarından bunların lineer kombinasyonu olan (32) numaralı fonksiyon da (29) numaralı diferansiyel denklemin genel çözümü olur.

III. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Bu durumda m_1 ve m_2 kökleri,

$$m_1 = -\frac{b}{2a} + i\sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = \alpha + i\beta$$

$$m_2 = -\frac{b}{2a} - i\sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = \alpha - i\beta$$

dır ve iki eşlenik kompleks sayıdır. Burada α ve β reel sayılar olup $i = \sqrt{-1}$ 'dir. Buna göre, diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = k_1e^{(\alpha + i\beta)x} + k_2e^{(\alpha - i\beta)x}$$

şeklinde yazılabilir. Ancak diferansiyel denklemin çözümünün bu şekilde verilmesi genel olarak pek uygun düşmemektedir. Bu nedenle, "Euler formülü" adı verilen

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

bağıntısını kullanılarak genel çözüm daha uygun bir şekilde aşağıdaki gibi verilir.

$$y = k_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + k_2 e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(k_1 e^{i\beta x} + k_2 e^{-i\beta x})$$

$$= e^{\alpha x}\left[k_1 \cos \beta x + i \sin \beta x) + k_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)\right]$$

Bu ifade sadeleştirilir ve $k_1 + k_2 = c_1$ *ve* $i(k_1 - k_2) = c_2$ olmak üzere yeni keyfi sabit sayılar kullanılırsa, diferansiyel denklemin genel çözümü olarak

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \qquad (33)$$

elde edilir.

Örnek 2. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

denklemini çözünüz.

Önce karakteristik denklemi yazalım.

$$m^3 + 2m^2 - m - 2 = 0$$

Bu cebirsel denklemin kökleri $m_1 = -1$, $m_2 = 1$ ve $m_3 = -2$ olduğundan diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-2x}$$ bulunur.

Örnek 3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

denklemini çözünüz.

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \quad , \quad m_1 = 2 \quad , \quad m_2 = 2$$

Buna göre genel çözüm,

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

Örnek 4. $\dfrac{d^5y}{dx^5} - 5\dfrac{d^4y}{dx^4} + 4\dfrac{d^3y}{dx^3} + 16\dfrac{d^2y}{dx^2} - 32\dfrac{dy}{dx} + 16y = 0$

denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem $m^5 - 5m^4 + 4m^3 + 16m^2 - 32m + 16 = 0$ ve kökleri $m_1 = 1, m_2 = -2, m_3 = 2, m_4 = 2, m_5 = 2$ olduğundan, diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2) e^{2x} \text{ olur.}$$

Örnek 5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$

denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem $m^2 + 4m + 5 = 0$ ve kökleri $m_1 = -2 + 2i, m_2 = -2 - 2i$ olduğundan, diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = e^{-2x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) \text{ bulunur.}$$

Örnek 6. $\dfrac{d^6y}{dx^6} - 6\dfrac{d^5y}{dx^5} + 12\dfrac{d^4y}{dx^4} - 6\dfrac{d^3y}{dx^3} - 9\dfrac{d^2y}{dx^2} + 12\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$

denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem $m^6 - 6m^5 + 12m^4 - 6m^3 - 9m^2 + 12m - 4 = 0$ kökleri $m = 1, 1, 1, -1, 2, 2$ olduğundan genel çözüm

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x + (c_4 + c_5 x) e^{2x} + c_6 e^{-x} \text{ bulunur.}$$

Örnek 7. $\dfrac{d^5y}{dx^5} - 2\dfrac{d^4y}{dx^4} + \dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$ denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem $m^5 - 2m^4 + m^3 = m^3 (m^2 - 2m + 1) = 0$ ve kökleri $m = 0, 0, 0, 1, 1$ olduğundan genel çözüm,

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + (c_4 + c_5 x) e^x \text{ bulunur.}$$

Örnek 8. $9\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 0$ denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem $9m^2 + 6m + 5 = 0$ ve kökleri $m = -\dfrac{1}{3} \pm \dfrac{2}{3} i$ olduğundan, genel çözüm

$$y = e^{-\frac{1}{3}x} \left(c_1 \cos \frac{2}{3} x + c_2 \sin \frac{2}{3} x \right) \qquad (34)$$

olur. Başlangıç şartları kulanılarak c_1 ve c_2 'nin değerleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$y(0) = e^0 (c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = 6$$

Buradan, $c_1 = 6$ elde edilir.

İkinci başlangıç şartını kullanmak için önce y(x) 'ın türevi alınırsa,

$$y'(x) = -\frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} \left(c_1 \cos \frac{2}{3} x + c_2 \sin \frac{2}{3} x \right)$$

$$+ \left(-\frac{2}{3} c_1 \sin \frac{2}{3} x + \frac{2}{3} c_2 \cos \frac{2}{3} x \right) e^{-\frac{1}{3}x}$$

elde edilir. Buradan, $y'(0) = 0$ başlangıç şartı uygulanırsa,

$$y'(0) = -\frac{1}{3} y(0) + e^0 \left(-\frac{2}{3} c_1 \sin 0 + \frac{2}{3} c_2 \cos 0 \right) = 0$$

$$-\frac{1}{3} y(0) + \frac{2}{3} c_2 = 0$$

$$\frac{2}{3} c_2 = \frac{1}{3} . 6 \quad \text{ve} \quad c_2 = 3$$

elde edilir. c_1 ve c_2 'nin bu değerleri Denk. 34 'de yerlerine konursa,

$$y = 3 e^{-\frac{1}{3}x} \left(2 \cos \frac{2}{3} x + \sin \frac{2}{3} x \right) \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 9. 10 'uncu mertebeden sabit katsayılı bir lineer homogen diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin kökleri, m = 3, 3, 3, 3, 2 + 3i, 2 – 3i, 2 + 3i, 2 – 3i, 2 + 3i, 2 – 3i olarak biliniyor. Denklemin genel çözümünü yazınız.

Karakteristik kökler verlidğine göre, denklemin genel çözümü doğrudan aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3) e^{3x} + [(c_5 + c_6 x + c_7 x^2) \cos 3x + (c_8 + c_9 x + c_{10} x^2) \sin 3x] e^{2x}$$

Örnek 10. $(D^4 + 8 D^2 + 16) y = 0$ denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem $m^4 + 8 m^2 + 16 = (m^2 + 4)^2 = 0$ olduğundan kökler, m = 2i, 2i, – 2i, – 2i bulunur. Denklemin genel çözümü,

$$y = (c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \sin 2x \text{ olur.}$$

4-4 SABİT KATSAYILI, HOMOGEN OLMAYAN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

n 'inci mertebeden, sabit katsayılı ve homogen olmayan bir adi lineer diferansiyel denklem

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x) \qquad (35)$$

şeklinde verilir. Burada $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reel sabit sayılardır ve önceden biliyoruz ki, bu denklemin genel çözümü,

$$y = y_c + y_p \qquad (36)$$

dır.

Denk. 35 'ın homogen kısmının genel çözümü olan y_c 'nin nasıl bulunduğunu biliyoruz. Şimdi ise amacımız, homogen olmayan bu denklemin bir özel çözümü olan ve bir keyfi sabit sayı içermeyen y_p çözümünü ve sonuç olarak (35) numaralı denklemin genel çözümünü bulmaktır.

y_p 'nin bulunması ile ilgili olarak birkaç metot geliştirilmiştir. Bu metotlar, sırası ile,

(i) Belirsiz Katsayılar Metodu

(ii) Parametrelerin Değişimi Metodu

(iii) Operatör Metodu

Bu metotların herbiri aşağıda sıra ile ele alınmış bulunmaktadır.

A. Belirsiz Katsayılar Metodu

(35) numaralı diferansiyel denklemde görülen *F(x)* fonksiyonu bir *UC* fonksiyonu veya bu fonksiyonların lineer kombinasyonu ise, ancak o zaman, belirsiz katsayılar metodu adı verilen bir yöntem kullanarak y_p fonksiyonunu bulmak mümkün olmaktadır. *F(x)* fonksiyonu *UC* fonksiyonu dışında herhangi bir fonksiyon ise o zaman bu metod yerine başka metodlar kullanılır.

UC fonksiyonlarının tanımı, hangi fonksiyonların birer *UC* fonksiyonu olduğu ve bu fonksiyonların nasıl elde edildiği hususu ayrıntılı olarak aşağıda ele alınmıştır.

UC fonksiyonları şunlardır :

1) x^n bir *UC* fonksiyonudur. Burada *n* sıfır veya pozitif bir tam sayıdır.

2) e^{ax}, burada a, sıfırdan farklı bir reel sayıdır.

3) $sin\ (bx + c)$, burada b ve c birer reel sayı, $b \neq 0$ dır.

4) $cos\ (bx + c)$, burada b ve c birer reel sayı, $b \neq 0$ dır.

5) Bu fonksiyonlardan herhangi ikisinin veya daha fazlasının biribiri ile çarpımı olan bir fonksiyon.

$F\ (x)$ fonksiyonu herhangi bir UC fonksiyonu olablir, iki veya daha fazla UC fonksiyonunun bir lineer kombinasyonu olabilir. Her iki halde de, bu fonksiyonların aileleri nasıl bulunur ve verilen $F\ (x)$ fonksiyonunun UC fonksiyonları ailesinin elemanları nasıl bulunur? Bütün bunlar aşağıda örneklerle açıklanmış bulunmaktadır.

Örnek 1. $F\ (x) = 3\ x^2$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun birbirinden farklı türevlerinden oluşan UC fonksiyonları ailesini bulunuz.

$F\ (x) = 3\ x^2$ bir UC fonksiyonudur. Bu fonksiyonun türevlerini bulalım.

$F'\ (x) = 6x$

$F''\ (x) = 6.1 = 6$

bulunur. Burada, x^2, x ve 1 birer UC fonksiyonudur ve bunların katsayılarını gözönüne almak gerekmez. Buna göre, verilen $F\ (x) = 3\ x^2$ fonksiyonunun kendisi ve türevlerini oluşturduğu UC fonksiyonlar ailesi U ile gösterilirse,

$$U = \{x^2\ ,\ x\ ,\ 1\}$$

bulunmuş olur.

Örnek 2. $F\ (x) = x^2 \cos 3x$ fonksiyonu ve birbirinden farklı türevlerinden oluşan UC fonksiyonları ailesini bulunuz.

$F\ (x) = x^2 \cos 3x$

$F'\ (x) = 2x \cos 3x - 3\ x^2 \sin 3x$

$F''\ (x) = 2 \cos 3x - 6x \sin 3x - 6x \sin 3x - 9\ x^2 \cos 3x$

$F'''\ (x) = -6 \sin 3x - 12 \sin 3x - 36\ x \cos 3x - 18\ x \cos 3x + 27\ x^2 \sin 3x$

Burada türeve devam edilmesi halinde yeni UC fonksiyonlarının elde edilemeyeceği açıktır. Buna göre,

$$U = \{x^2 \cos 3x\ ,\ x^2 \sin 3x\ ,\ x \cos 3x\ ,\ x \sin 3x\ ,\ \cos 3x\ ,\ \sin 3x\}$$

olur.

Örnek 3. $F(x) = x^3 + x \sin x + \cos x$ için UC fonksiyon ailesini bulunuz.

Burada x^3, $x \sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının herbiri *UC* fonksiyonudur ve $F(x)$ bu fonksiyonların bir lineer kombinasyonudur. Bu nedenle, önce bu fonksiyonların herbirinin *UC* fonksiyon aile elemanları bulunur, sonra da bunlar arasında tekrar edenleri gözönüne almamak suretiyle istenilen *UC* fonksiyonları ailesi,

$$U = \{x^3, x^2, 1, x \sin x, x \cos x, \sin x, \cos x\}$$

elde edilir. Burada dikkat edilecek en önemli husus, *U* ailesinin her elemanı birbirinden farklı bir *UC* fonksiyonudur ve tekrar eden elemanlardan yalnız bir tanesi aileye dahil edilmiştir.

Örnek 4. $$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 2\cos 2x + 3x + e^x \qquad (37)$$

denklemini çözünüz.

Önce, (37) denkleminin homogen kısmının genel çözümü

$$y_c = (c_1 + c_2 x)\, e^{-x} \qquad (38)$$

bulunur. Burada görülen e^{-x} ve $x e^{-x}$ fonksiyonları birer *UC* fonksiyonudur. Diğer taraftan, $F(x) = 2\cos 2x + 3x + e^x$ fonksiyonun *UC* fonksiyonları ailesi

$$U = \{\cos 2x, \sin 2x, x, 1, e^x\}$$

dır. Bu ailenin elemanları ile homogen kısmın çözümünde yer alan e^{-x} ve $x e^{-x}$ fonksiyonları karşılaştırılırsa, bu fonksiyonlardan hiçbirinin *U* ailesi içinde mevcut olmadığı görülür. Bu durumda, belirsiz katsayılar metoduna göre,

$$y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + Cx + D + Ee^x \qquad (39)$$

yazılır. Burada, *A, B, C, D* ve *E* katsayıları, bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için y_p'nin türevleri alınır.

$$y_p' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x + C + Ee^x$$

$$y_p'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x + Ee^x$$

y_p, ve türevleri diferansiyel denklemde yerlerine konursa,

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + Ee^x + 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x + C + Ee^x)$$

$$+ A\cos 2x + B\sin 2x + Cx + D + Ee^x = 2\cos 2x + 3x + e^x$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafından bulunan aynı fonksiyonların katsayıları birbirine eşitlenirse,

$$-3A + 4B = 2$$
$$-4A - 3B = 0$$
$$2C + D = 0$$
$$C = 3$$
$$4E = 1$$

yazılır. Buradan, $A = -\frac{6}{25}$, $B = \frac{8}{25}$, $C = 3$, $D = -6$, $E = \frac{1}{4}$ bulunur.

Bu değerler Denk. 39 'da yerlerine konursa,

$$y_p = -\frac{6}{25}\cos 2x + \frac{8}{25}\sin 2x + 3x - 6 + \frac{1}{4}e^x$$

elde edilir. Böylece, verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = y_c + y_p = (c_1 + c_2 x)\, e^{-x} - \frac{6}{25}\cos 2x + \frac{8}{25}\sin 2x + 3x - 6 + \frac{1}{4}e^x$$

bulunur.

Örnek 5. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 2x - 40\cos 2x$ (40)

denklemini çözünüz.

Homogen kısmın karakteristik denkleminin kökleri $m = 1 , -2$ olduğundan, önce

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} \tag{41}$$

bulunur. Buradaki UC fonksiyonları e^x ve e^{-2x} dır. Diğer taraftan, bu problemde,

$$U = \{x , 1 , \cos 2x , \sin 2x\}$$

olduğundan, ve e^x , e^{-2x} fonksiyonları ile U ailesinin fonksiyonları arasında bir tekrarlama olmadığından,

$$y_p = Ax + B + C\cos 2x + D\sin 2x \tag{42}$$

olur. y_p ve türevleri Denk. 40 'da yerlerine konursa,

$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + A - 2C\sin 2x + 2D\cos 2x$$
$$-2Ax - 2B - 2C\cos 2x - 2D\sin 2x = 2x - 4D\cos 2x$$

elde edilir. Buna göre,

$$-6C + 2D = -40$$

$$-6D - 2C = 0$$

$$-2A = 2$$

$$A - 2B = 0$$

olur. Buradan $A = -1$, $B = -1/2$, $C = 6$, $D = -2$ bulunur ve denklemin genel çözümü,

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} - x - 1/2 + 6 \cos 2x - 2 \sin 2x$$

elde edilir.

Örnek 6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x$ (43)

denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem kökleri $m = \pm i$ olduğundan

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x \tag{44}$$

dır. Burada y_c 'nin içerdiği *UC* fonksiyonları $\cos x$ ve $\sin x$ 'dır. Diğer taraftan $F(x) = \sin x$ olduğundan, bu fonksiyonun *UC* fonksiyonları ailesi

$$U = \{\cos x , \sin x\}$$

bulunur. Görülüyor ki, *U* 'nun elemanları ile y_c 'nin içerdiği fonksiyonlar aynıdır. Bu durumda, *U* - fonksiyonlarını ele alıp belirsiz katsayılar metodunu uygulayamayız. *U* 'nun elemanlarının herbirini x ile çarparsak,

$$\tilde{U} = \{x \cos x , x \sin x\}$$

elde edilir. Şimdi belirsiz katsayılar metodu uygulanabilir ve

$$y_p = Ax \cos x + Bx \sin x \tag{45}$$

yazılır. Burada y_p 'nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa,

$$y'_p = A(\cos x - x \sin x) + B(\sin x + x \cos x)$$

$$y''_p = A(-2 \sin x - x \cos x) + B(2 \cos x - x \sin x)$$

olur. y_p ve türevleri Denk. 43 'de yerlerine konursa,

$$A(-2 \sin x - x \cos x) + B(2 \cos x - x \sin x) + Ax \cos x + Bx \sin x = \sin x$$

veya

$$-2A \sin x + 2B \cos x = \sin x$$

elde edilir. Buradan $A = -1/2$ ve $B = 0$ bulunur. Bu durumda,

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 1/2\, x \cos x$$ bulunur.

Örnek 7. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{dy}{dx} = 3e^{2x} + 4e^{-x}$ (46)

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Karakteristik denklemin kökleri $m = 0, 1, -1$ ve

$$y_c = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} \tag{47}$$

dır. y_c'nin içerdiği UC - fonksiyonları $1, e^{x}, e^{-x}$ ve $F(x) = 3e^{2x} + 4e^{-x}$ fonksiyonunun UC - fonksiyonları ailesi

$$U = \{e^{2x}, e^{-x}\}$$

dır. Burada görülen e^{-x} fonksiyonu tekrar eden bir fonksiyon olduğundan, bu fonksiyon yerine $x e^{-x}$ alınırsa,

$$\tilde{U} = \{e^{2x}, x e^{-x}\}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$y_p = A e^{2x} + B x e^{-x} \tag{48}$$

yazılır ve y_p'nin türevleri,

$$y'_p = 2Ae^{2x} + B(1 - x)e^{-x}$$

$$y''_p = 4Ae^{2x} - B(2 - x)e^{-x}$$

$$y'''_p = 8Ae^{2x} + B(3 - x)e^{-x}$$

bulunur. y_p ve türevleri (46) denkleminde yerlerine konursa,

$$8A e^{2x} + B(3 - x)e^{-x} - 2A e^{2x} - B(1 - x)e^{-x} = 3e^{2x} + 4e^{-x}$$

veya

$$6A e^{2x} + 2B e^{-x} = 3e^{2x} + 4e^{-x}$$

bulunur. Buradan, $A = 1/2$, $B = 2$ elde edilir. Buna göre,

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + 1/2\, e^{2x} + 2x e^{-x}$$

elde edilir.

Örnek 8. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 3 \sin 2x$ (49)

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Karakteristik denklemin kökleri $m = \pm 2i$ ve

$$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \tag{50}$$

dır. Diğer taraftan,

$$U = \{\sin 2x , \cos 2x\}$$

ve

$$\widetilde{U} = \{x \sin 2x , x \cos 2x\}$$

olduğundan,

$$y_p = Ax \sin 2x + Bx \cos 2x$$

$$y'_p = A (\sin 2x + 2x \cos 2x) + B (\cos 2x - 2x \sin 2x)$$

$$y''_p = 4A (\cos 2x - x \sin 2x) - 4B (\sin 2x + x \cos 2x)$$

olur. Bu değerler Denk. 49 'da yerlerine konursa,

$$4 A (\cos 2x - x \sin 2x) - 4 B (\sin 2x + x \cos 2x) +$$

$$4 Ax \sin 2x + 4 Bx \cos 2x = 3 \sin 2x$$

elde edilir. Buradan, $A = 0$ ve $B = -3/4$ bulunur. Buna göre

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - 3/4 \, x \cos 2x \quad \text{olur.}$$

Örnek 9. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 5y = 5 \sin 2x + 10x^2 - 3x + 7$ (52)

Karakteristik denklemin kökleri $m = 1 , -1 + 2i , -1 - 2i$ ve

$$y = c_1 e^x + e^{-x} (c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x) \tag{53}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$U = \{\sin 2x , \cos 2x , x^2 , x , 1\}$$

olduğundan,

$$y_p = A \sin 2x + B \cos 2x + C x^2 + Dx + E \tag{54}$$

yazılır. y_p 'nin türevleri,

$$y'_p = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x + 2Cx + D$$

$$y''_p = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 2C$$

$$y'''_p = -8 A \cos 2x + 8B \sin 2x$$

olur. y_p ve türevlerini Denk. 52 'de yerlerine koyarsak,

$$\sin 2x\,[8B - 4A - 6B - 5A] + \cos 2x\,[-8A - 4B + 6A - 5B]$$
$$- 5C\,x^2 + (6C - 5D)\,x + (2C + 3D - 5E) = 5 \sin 2x + 10x^2 - 3x + 7$$

elde edilir. Buradan,

$$2B - 9A = 5$$
$$-2A - 9B = 0$$
$$-5C = 10$$
$$6C - 5D = -3$$
$$2C + 3D - 5E = 7$$

yazılır. Bu denklemlerden $A = -\frac{9}{17}$, $B = \frac{2}{17}$, $C = -2$, $D = -\frac{9}{5}$, $E = -\frac{82}{25}$ bulunur. Böylece,

$$y = c_1 e^x + e^{-x}(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x) - \frac{9}{17}\sin 2x + \frac{2}{17}\cos 2x$$
$$- 2x^2 - \frac{9}{5}x - \frac{82}{25}$$

Örnek 10. $(D^4 + 2D^3 - 3D^2)\,y = 18x^2 + 16x\,e^x + 4e^{3x} - 9$ (55)

Karakteristik denklemin kökleri $m = 0, 0, -3, 1$

$$y_c = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-3x} + c_4 e^x \tag{56}$$

bulunur. Burada,

$$U = \{e^{3x}, x e^x, e^x, x^2, x, 1\}$$

ve

$$U' = \{e^{3x}, x^2 e^x, x e^x, x^4, x^3, x^2\}$$

olduğundan,

$$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx^2 e^x + Ex e^x + F e^{3x} \tag{57}$$

olur.

$$y_p' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + (2D + E)x e^x + Dx^2 e^x + Ee^x + 3F e^{3x}$$

$$y_p'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C + (2D + E + E)e^x + (2D + 2D + E)x e^x$$
$$+ Dx^2 e^x + 9F e^{3x}$$

$$y_p''' = 24Ax + 6B + [(2D + 2E) + (4D + E)]e^x + [(4D + E) + 2D]x e^x$$
$$+ Dx^2 e^x + 27F e^{3x}$$

$$y_p^{IV} = 24A + [(6D + 3E) + (6D + E)]e^x + [(6D + E) + 2D]x e^x + D x^2 e^x + 81 F e^{3x}$$

y_p ve türevleri Denk. 55 'de yerlerine konursa,

$$24 A + 12 B - 6C + (48 A - 18 B) x - 36 x^2 + (18 D + 4 E) e^x + 8 D x e^x + 108 F e^{3x} = 18 x^2 + 16 x e^x + 4 e^{3x} - 9$$

elde edilir. Buradan, $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{4}{3}$, $C = -\frac{19}{6}$, $D = 2$, $E = -9$, $F = \frac{1}{27}$ bulunur. Böylece,

$$y_p = -\frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 - \frac{19}{6} x^2 + 2x^2 e^x - 9x e^x + \frac{1}{27} e^{3x}$$

ve genel çözüm,

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-3x} + c_4 e^x - \frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 - \frac{19}{6} x^2 + 2x^2 e^x - 9x e^x + \frac{1}{27} e^{3x}$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen diferansiyel denklemleri ve başlangıç-değer problemlerini "Belirsiz Katsayılar Metodu" ile çözünüz.
   a. $y'' + 4y = x^2 + 3 e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$
   b. $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
   c. $y'' - 2y' + y = x e^x + 4$
   d. $y'' - y = \sin^2 x = 1/2 (1 - \cos 2x)$
   e. $y'' + 4y = 4 \sin^2 x$
   f. $y'' + y = 12 \cos^2 x$
   g. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 8x + 8 + 6 e^{-x}$
   h. $y'' + 2y' + 5y = 6 \sin 2x + 7 \cos 2x$
   ı. $y'' - y' - 6y = 8 e^{2x} - 5 e^{3x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$
   j. $y'' + 2y' + y = 4 \sin 2x$
   k. $y'' - 5y' + 6y = -2 + 36 x^2 + e^x$

l. $y''' - 2y'' + 10y' = 3x e^{x}$

m. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \cos x$

n. $y'' + y = x(1 + \sin x)$

o. $y'' - y = e^{-x}(2 \sin x + 4 \cos x)$

p. $y'' + 3y' + 2y = 1 + 3x + x^2$

r. $y'' + 4y' + 13y = 8 \sin 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

s. $y'' - 4y' + 3y = 9x^2 + 4$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 8$

t. $y' + 16y = 5 \sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$

2. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerde belirsiz katsayıları bulmaksızın ve genel çözüme gitmeksizin yalnız her denklem için y_p 'yi yazınız.

a. $y'' + 6y' + 13y = x e^{-3x} \sin 2x + x^2 e^{-2x} \sin 3x$

b. $y^{iv} - 16y = x^2 \sin 2x + x^4 e^{2x}$

c. $y'' + 4y = x^2 \sin 2x + (6x + 7) \cos 2x$

d. $y'' + 3y' = 2x^4 + x^2 e^{-3x} + \sin 3x$

e. $y + y'' - 4y' = 3e^{-x} - 4x - 6$

f. $y^{iv} + y'' = 1 + 2x e^{x}$

g. $y'' + 4y = 6 \sin 2x + 3x^2$

h. $y'' + 4y' + 5y = e^{-x} + 15x$

i. $y'' + 4y = \sin x + 3 \cos x$

j. $y'' - 4y' + 3y = 3e^{x} + 2e^{-x} + x^3 e^{-x}$

k. $y'' + y = x \sin x + \cos x$

l. $y'' + 9y = x^2 + 3x \cos 2x$

B. Parametrelerin Değişimi Metodu

Belirsiz Katsayılar Metodu, herhangi bir önemli matematiksel güçlük yaratmadan kolayca uygulanabilen ve kesin sonuca giden bir yöntemdir. Yalnız bu, metodun uygulanabilmesi için $F(x)$ fonksiyonunun bir *UC* fonksiyonu olması veya *UC* fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olması koşulu vardır. Örneğin, $\tan x$ bir *UC* fonksiyonu olmadığı için,

$$y'' + y = \tan x \tag{58}$$

denkleminin, "Belirsiz Katsayılar Metodu" ile çözümü mümkün değildir. Bu nedenle, sabit katsayılı veya değişken katsayılı homogen olmayan herhangibir lineer adi diferansiyel denklemi çözmek için yeni bir metoda gereksinim vardır. Bu metod, **"Parametrelerin Değişimi Metodu"** dur.

Adı geçen metodu iyi anlayabilmek için önce, birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin çözümünü tekrar ele alalım.

$$y' + P(x)\, y = Q(x) \tag{59}$$

Bu denklemin homogen kısmının çözümü,

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\, dx$$

$$y = k\, e^{-\int P(x)dx} \tag{60}$$

olur. Bu çözümü daha önce y_c ile göstermiştik. Burada k bir integrasyon sabiti veya başka bir deyişle herhangi bir keyfi sabit sayıdır.

Şimdi kabul edelim ki, integrasyon sabiti k herhangi bir sabit sayı değildir ve x 'ın bir fonksiyonudur. Bu fonksiyonu $v(x)$ ile gösterirsek yukarıdaki ifade aşağıdaki şekli alır.

$$y = v(x)\, e^{-\int P(x)dx} \tag{61}$$

Burada, "Denk. 61 'in, homogen olmayan (59) nolu dif. denklemin bir çözümü olması için $v(x)$ ne olmalıdır" gibi önemli bir soru akla gelebilir. Bu soruyu ilk defa "Lagrange" sormuştur. Sorunun yanıtını almak için y 'nin bu değeri Denk. 59 'da yerine konursa,

$$v(x)\frac{d}{dx}e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} + P(x)v(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \tag{62}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\frac{d}{dx}e^{-\int P(x)dx} = -P(x)\, e^{-\int P(x)dx}$$

olduğundan, Denk. 62 sadeleştirilir ve

$$\frac{dv}{dx} = Q(x)\, e^{\int P(x)dx} \tag{63}$$

elde edilir. Denk. 63 'ün sağ tarafı yalnız x 'ın bir fonksiyonu olduğundan integral alınabilir ve

$$v(x) = \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} + c$$

elde edilir. Burada c bir integrasyon sabitidir. $v(x)$ 'ın bu değeri, (61) numaralı denklemde yerine konursa,

$$y = c\, e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \tag{64}$$

elde edilir. Görülüyor ki, bu eşitliğin sağ tarafındaki birinci terim bir keyfi sabit sayı ihtiva etmekte olup (60) denkleminin aynıdır ve Denk. 59 'un homogen kısmının bir genel çözümüdür. İkinci terim ise bir sabit içermemektedir ve (59) denkleminin bir özel çözümüdür. Bu özel çözümü de y_p ile gösterirsek, genel çözüm,

$$y = y_c + y_p \tag{65}$$

olur.

Homogen olmayan (59) nolu diferansiyel denklemin bir özel çözümü olan y_p 'nin ve genel çözüm y 'nin, yukarıda açıklandığı şekilde bulunmasına **"Lagrange Metodu"** veya **Parametrelerin Değişimi Metodu** denir.

Sabit katsayılı veya değişken katsayılı homogen olmayan herhangi bir lineer diferansiyel denklem verilmiş olsun. Eğer bu denklemin homogen kısmının genel çözümü biliniyorsa, parametrelerin değişimi metodu kullanılarak denklemin bir y_p özel çözümü ve sonuç olarak denklemin genel çözümü bulunabilir. Örnek olarak,

$$a_0(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = F(x) \tag{66}$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin homogen kısmının genel çözümü

$$y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{67}$$

olsun. Burada y_1 ve y_2, homogen denklemin lineer bağımsız çözümleri ve c_1 ve c_2 de keyfi sabit sayılardır. Parametrelerin değişimi metoduna göre, (67) denkleminde c_1 ve c_2 yerine $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ konulduğunda

$$y = v_1(x) \cdot y_1(x) + v_2(x) \cdot y_2(x)$$

elde edilir. Şimdi amacımız, bu fonksiyonun Denk. 66 'nın bir özel çözümü olabilmesi için $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ 'ın değerlerini bulmaktır. Bu durum $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ için ortaya konan birinci koşuldur. Bunun için önce yukarıdaki denklemi ve birinci

türevini alt alta yazalım.

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 \tag{68}$$

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2' + v_1' y_1 + v_2' y_2 \tag{69}$$

Burada, y''_p 'nin değerini bulmadan önce, v_1 ve v_2 'nin türevlerini içeren son iki terimin toplamı için,

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \tag{70}$$

olduğu kabul edilir. Bu da ikinci koşuldur ve bunun sonucu olarak y''_p nün ifadesinde v_1 ve v_2 'nin ikinci türevleri yer almayacaktır. Böylece, $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ cinsinden ifade edilen diferansiyel denklemin mertebesi ve derece düşürülmüş olmaktadır. Bu durumda, Denk. 70 yeniden yazılır ve türevi alınırsa,

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2' \tag{71}$$

$$y''_p = v_1 y''_1 + v_1' y_1 + v_2 y''_2 + v_2' y_2 \tag{72}$$

olur. Bundan sonra, (68), (71) ve (72) numaralı denklemler, (66) nolu diferansiyel denklemde yerlerine konursa,

$$a_0 \left(v_1 y''_1 + v_1' y_1' + v_2 y''_2 + v_2' y_2' \right) + a_1 \left(v_1 y_1' + v_2 y_2' \right) + a_2 \left(v_1 y_1 + v_2 y_2 \right) = F(x)$$

elde edilir. Bu denklemi yeniden düzenlersek,

$$v_1 \left(a_0 y''_1 + a_1 y_1' + a_2 y_1 \right) + v_2 \left(a_0 y''_2 + a_1 y_2' + a_2 y_2 \right)$$

$$+ a_0 \left(v_1' y_1' + v_2' y_2' \right) = F(x) \tag{73}$$

bulunur.

Burada, y_1 ve y_2 'nin, diferansiyel denklemin homogen kısmının birer çözümü olduğu hatırlanırsa, eşitliğin sol tarafındaki birinci ve ikinci terimlerin değerleri **"sıfır"** olur. O zaman, Denk. 73,

$$a_0 \left(v_1' y_1' + v_2' y_2' \right) = F(x) \tag{74}$$

şeklini alır. Bu durumda, (70) ve (74) 'ü alt alta yazarsak,

$$y_1 v_1' + y_2 v_2' = 0 \tag{75}$$

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' = \frac{F(x)}{a_0}$$

elde edilir. Burada ilk amacımız şüphesiz v_1' ve v_2''yü bulmaktır. y_1 ve y_2 lineer bağımsız fonksiyonlar olduğundan,

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

dır. Buna göre,

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{F(x)}{a_0} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 F(x)}{a_0\left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right)}$$

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & \frac{F(x)}{a_0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 F(x)}{a_0\left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right)}$$

elde edilir. İntegrali alınırsa,

$$v_1(x) = -\int^x \frac{y_2 F(x)\, dx}{a_0 W(y_1, y_2)} \qquad (76)$$

$$v_2(x) = \int^x \frac{y_1 F(x)\, dx}{a_0 W(y_1, y_2)}$$

bulunur. $v_1(x)$ ve $v_2(x)$'ın bu değerleri (68) denkleminde yerlerine konursa, homogen olmayan (66) diferansiyel denklemin bir y_p özel çözümü bulunmuş olur.

Örnek 1. $y'' + y = \tan x$ (77)

denklemini çözünüz.

Homogen kısmın genel çözümü,

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x \tag{78}$$

dır. Parametrelerin değişimi metoduna göre,

$$y_p = v_1(x) \cos x + v_2(x) \sin x \tag{79}$$

$$y'_p = -v_1 \sin x + v_2 \cos x + v'_1 \cos x + v'_2 \sin x$$

olur. Burada,

$$v'_1 \cos x + v'_2 \sin x = 0 \tag{80}$$

olduğundan,

$$y''_p = -v_1 \cos x - v_2 \sin x - v'_1 \sin x + v'_2 \cos x \tag{81}$$

olur. (79) ve (81) 'in Denk. 77 'de yerlerine konulması sonucu elde edilen denklem ile Denk. 80 alt alta yazılırsa,

$$v'_1 \cos x + v'_2 \sin x = 0$$

$$-v'_1 \sin x + v'_2 \cos x = \tan x$$

elde edilir. Buradan,

$$v'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

$$v'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \sin x$$

bulunur. İntegral alınarak,

$$v_1(x) = \sin x - \ln|\sec x - \tan x| + c_3$$

$$v_2(x) = -\cos x + c_4$$

elde edilir. $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ 'ın bu değerleri Denk. 79 'da yerlerine konursa,

$$y_p(x) = c_3 \cos x + c_4 \sin x - (\cos x)(\ln|\sec x - \tan x|)$$

elde edilir.

Yukarıda görüldüğü şekilde önce y_c ve sonra y_p bulunduktan sonra, Denk. 77 'nin genel çözümü,

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos x + c_4 \sin x - (\cos x)(\ln|\sec x + \tan x|)$$

$$y = (c_1 + c_3)\cos x + (c_2 + c_4)\sin x - (\cos x)(\ln|\sec x + \tan x|)$$

olur. Burada $c_1 + c_2$ yerine c_1 ve $c_2 + c_4$ yerine c_2 yazılarak, dif. denklemin genel çözümü,

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - (\cos x)(\ln|\sec x + \tan x|)$$

bulunur. Görülüyor ki, $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ 'ın bulunmasında ortaya çıkan integrasyon sabitleri c_3 ve c_4 'ü "sıfır" varsaymakla hiçbirşey değişmemektedir.

Örnek 2. $y'' + y = \sec x$ (82)

denklemini çözünüz.

Homogen kısmın genel çözümü

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

dır. Parametrelerin değişimi metoduna göre,

$$y_p = v_1(x)\cos x + v_2(x)\sin x$$

$$y_1' = -v_1 \sin x + v_2 \cos x + v_1' \cos x + v_2' \sin x$$

olur. Burada,

$$v_1' \cos x + v_2' \sin x = 0 \quad \text{olduğundan,} \tag{83}$$

$$y_p' = -v_1 \sin x + v_2 \cos x$$

$$y_p'' = -v_1 \cos x - v_2 \sin x - v_1' \sin x + v_2' \cos x$$

olur. Bu değerler Denk. 82 'de yerlerine konursa,

$$-v_1 \cos x - v_2 \sin x - v_1' \sin x + v_2' \cos x + v_1 \cos x + v_2 \sin x = \sec x$$

ve buradan,

$$-v_1' \sin x + v_2' \cos x = \sec x \tag{84}$$

bulunur. (83) ve (84) 'den

$$v_1'(x) = \tan x \quad \text{ve} \quad v_2'(x) = 1$$

elde edilir. İntegral alınarak,

$$v_1(x) = \ln|\cos x| \quad \text{ve} \quad v_2(x) = x$$

bulunur. Buna göre,

$$y_p = (\cos x)(\ln|\cos x|) + x \sin x$$

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (\cos x)(\ln|\cos x|) + x \sin x$$

olur.

Örnek 3. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ (85)

denklemini çözünüz.

Parametrelerin değişimi metodu ile denklem çözülür.

$$y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

$$y_p = v_1 e^{x} + v_2 e^{2x}$$

$$y_p' = v_1 e^{x} + 2v_2 e^{2x} + v_1' e^{x} + v_1' e^{2x} \qquad \text{Burada,}$$

$$v_1' e^{x} + v_2' e^{2x} = 0 \tag{86}$$

olduğundan

$$y_p' = v_1 e^{x} + 2v_2 e^{2x} \qquad \text{ve}$$

$$y_p'' = v_1 e^{x} + 4v_2 e^{2x} + v_1' e^{x} + 2v_2' e^{2x}$$

olur. Bu değerler Denk. 85 'de yerlerine konursa,

$$v_1' e^{x} + 2v_2' e^{2x} = \frac{1}{1 + e^{x}} \tag{87}$$

elde edilir. (86) ve (87) 'den v_2' elimine edilirse,

$$v_1' e^{x} = -\frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$v_1' = -\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

elde edilir. Buradan,

$$v_1(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

bulunur. Aynı şekilde, (86) ve (87) 'den

$$v_2' e^{2x} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$v_2' = \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-x}} = e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

$$v_2(x) = \int \left[e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right] dx$$

$$v_2(x) = -e^{-x} + \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$

elde edilir. Buna göre,

$$y_p(x) = e^{x} \ln(1 + e^{-x}) - e^{x} + e^{2x} \ln(1 + e^{-x})$$

olur. Bu durumda, diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + (e^{x} + e^{2x}) \ln(1 + e^{-x}) \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 4. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$ (88)

denklemini çözünüz.

Parametrelerin değişimi metodu ile denklem çözülebilir. Homogen kısmın karakteristik denkleminin kökleri, $m = -2, -2$ olduğundan,

$$y_c = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

dır. Buna göre,

$$y_p = v_1 e^{-2x} + v_2 x e^{-2x} = (v_1 + v_2 x) e^{-2x} \tag{89}$$

$$y_p' = -2 v_1 e^{-2x} + v_2 (1 - 2x) e^{-2x} + v_1' e^{-2x} + v_2' x e^{-2x}$$

yazılabilir. Buradan,

$$v_1' e^{-2x} + v_2' x e^{-2x} = 0$$

veya

$$v_1' + v_2' x = 0 \tag{90}$$

bulunur. Bu durumda,

$$y_p = (v_1 + v_2 x) e^{-2x}$$

$$y_p' = (-2 v_2 + v_2 - 2 v_2 x) e^{-2x}$$

$$y_p'' = (4 v_1 - 4 v_2 + 4 v_2 x - 2 v_1' + v_2' - 2 v_2' x) e^{-2x}$$

olur. y_p ve türevleri Denk. 88 'de yerlerine konursa,

$$(4v_1 - 4v_2 + 4v_2 x - 2v_1' + v_2' - 2v_2' x) + 4(-2v_1 + v_2 - 2v_2 x) + 4(v_1 + v_2 x) = x^{-2}$$

elde edilir. Buradan,

$$-2v_1' + v_2'(1 - 2x) = x^{-2} \qquad (91)$$

bulunur. (90) ve (91) birlikte çözümlenirse,

$$v_1' = -x^{-1} \quad , \quad v_1 = -\ln x$$

ve

$$v_2' = x^{-2} \quad , \quad v_2 = -1/x$$

elde edilir. v_1 ve v_2 'nin bu değerleri (89) 'da yerlerine konursa,

$$y_p = -e^{-2x} \ln x - e^{-2x} = -(1 + \ln x)\, e^{-2x}$$

bulunur. Buna göre genel çözüm,

$$y = y_c + y_p = (c_1 + c_2 x)\, e^{-2x} - e^{-2x} \ln x$$
$$= (c_1 + c_2 x - \ln x)\, e^{-2x} \quad \text{olur.}$$

Örnek 5. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sec x \qquad (92)$

denklemini, "Parametrelerin Değişimi Metodu" ile çözünüz.

Denk. (92) 'nin homogen kısmının genel çözümü,

$$y_c = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

dır. Burada c_1 ve c_2 yerine $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ konursa,

$$y_p = v_1 e^{-2x} \cos x + v_2 e^{-2x} \sin x \qquad (93)$$

olur. Burada,

$$y_1(x) = e^{-2x} \cos x \quad , \quad y_2(x) = e^{-2x} \sin x$$

ile gösterilir ve (93) 'de yerlerine konursa,

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 \qquad (94)$$

elde edilir. y_p 'nin türevi alınırsa,

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2' + v_1' y_1 + v_2' y_2$$

bulunur. Burada,

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \qquad (95)$$

olduğundan, y_p ve türevleri alt alta yazılırsa,

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2'$$

$$y_p'' = v_1' y_1' + v_2' y_2' + v_1 y_1'' + v_2 y_2''$$

bulunur. Bu değerler Denk. (92) 'de yerlerine konursa,

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = e^{-2x} \sec x \qquad (96)$$

elde edilir. (95) ve (96) birlikte çözülürse,

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ e^{-2x}\sec x & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_2 e^{-2x} \sec x}{y_1' y_2 - y_1 y_2'}$$

$$= \frac{e^{-4x} \sin x \sec x}{-e^{-4x}\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)} = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

bulunur. Buradan,

$$v_1(x) = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = \ln|\cos x|$$

elde edilir. Aynı şekilde önce $v_2'(x)$ sonra da $v_2(x)$ bulunur.

$$v_2'(x) = \frac{y_1 e^{-2x} \sec x}{y_1 y_2' - y_1' y_2} = \frac{e^{-2x}\cos x\, e^{-2x}\sec x}{e^{-4x}\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)}$$

$$v_2'(x) = 1 \quad , \quad v_2(x) = x$$

elde edilir. Bu değerler Denk. 93 'de yerlerine konursa,

$$y_p = (\ln|\cos x|)e^{-2x}\cos x + xe^{-2x}\sin x$$

ve genel çözüm,

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-2x}\cos x \ln|\cos x| + xe^{-2x}\sin x$$

bulunur.

Örnek 6. $y'' - y = \tan x \sec x$ (97)

denklemini çözünüz.

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y_p = v_1(x) \cos x + v_2(x) \sin x \quad (98)$$

$$y_p' = v_1 \sin x + v_2 \cos x + v_1' \cos x + v_2' \sin x$$

bulunur. Burada,

$$v_1' \cos x + v_2' \sin x = 0 \quad (99)$$

olduğundan,

$$y_p'' = -v_1 \cos x - v_2 \sin x - v_1' \sin x + v_2' \cos x$$

olur. y_p ve türevleri Denk. 97 'de yerlerine konursa,

$$-v_1' \sin x + v_2' \cos x = \tan x \sec x \quad (100)$$

elde edilir. (99) ve (100) birlikte çözülürse,

$$v_2' = \tan x, \quad v_2 = \ln |\sec x|$$

$$v_1' = -\sin x \tan x \sec x$$

$$= -\tan^2 x$$

elde edilir. Buradan,

$$v_1 = -\int \tan^2 x \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = x - \tan x$$

elde edilir. Bu değerler (98)'de yerlerine konursa,

$$y_p = (x - \tan x) \cos x + \sin x \ln |\sec x|$$

elde edilir. Buna göre genel çözüm,

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \cos x + \sin x \ln |\sec x| \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 7. $y''' - 7y' + 6y = 2 \sin x$ (101)

denklemini, parametrelerin değişimi metodu ile çözünüz.

Denk. 101 'in homogen kısmının genel çözümü,

$$y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

dır. Buna göre,

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3$$

ve

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2' + v_3 y_3' + v_1' y_1 + v_2' y_2 + v_3' y_3$$

olur. Diğer taraftan,

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 + v_3' y_3 = 0 \qquad (102)$$

olduğundan,

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2' + v_3 y_3'$$

$$y_p'' = v_1 y_1'' + v_2 y_2'' + v_3 y_3'' + v_1' y_1' + v_2' y_2' + v_3' y_3'$$

bulunur. Şimdi burada üçüncü koşul olarak,

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' + v_3' y_3' = 0 \qquad (103)$$

kabul edilirse, bu durumda

$$y_p'' = v_1 y_1'' + v_2 y_2'' + v_3 y_3''$$

ve

$$y_p''' = v_1 y_1''' + v_2 y_2''' + v_3 y_3''' + v_1' y_1'' + v_2' y_2'' + v_3' y_3''$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde, y_p ve türevleri Denk. 101 'de yerlerine konursa,

$$y_p''' = v_1 y_1''' + v_2 y_2''' + v_3 y_3''' + v_1' y_1'' + v_2' y_2'' + v_3' y_3''$$

$$-7 y_p' = -7 v_1 y_1' - 7 v_2 y_2' - 7 v_3 y_3'$$

$$6 y_p = 6 v_1 y_1 + 6 v_2 y_2 + 6 v_3 y_3$$

olur. Bu üç denklem taraf tarafa toplanırsa,

$$2 \sin x = v_1 (y_1''' - 7 y_1' + 6 y_1) + v_2 (y_2''' - 7 y_2' + 6 y_2) + v_3 (y_3''' - 7 y_3' + 6 y_3)$$

$$+ (v_1' y_1'' + v_2' y_2'' + v_3' y_3'')$$

elde edilir. Buradan,

$$v_1' y_1'' + v_2' y_2'' + v_3' y_3'' = 2 \sin x \qquad (104)$$

bulunur. Şimdi (102), (103) ve (104)'ü tekrar alt alta yazalım.

$$y_1 v_1' + y_2 v_2' + y_3 v_3' = 0$$

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' + y_3' v_3' = 0$$

$$y_1'' v_1' + y_2'' v_2' + y_3'' v_3' = 2 \sin x$$

Bu denklem sisteminde üç bilinmeyen v_1', v_2' ve v_3''dür. Bunlar sırasıyla aşağıdaki şekilde bulunur.

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ 2\sin x & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{-3x} \\ 0 & 2e^{2x} & -3e^{-3x} \\ 2\sin x & 4e^{2x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & e^{-3x} \\ e^{x} & 2e^{2x} & -3e^{-3x} \\ e^{x} & 4e^{2x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-5\sin x\, e^{2x} e^{3x}}{20 e^{x} e^{2x} e^{-3x}} = -\frac{1}{2} e^{-x} \sin x$$

$v_2'(x)$ ve $v_3'(x)$ de aynı şekilde bulunur ve aşağıdaki değerleri alır.

$$v_2'(x) = \frac{8\sin x\, e^{x} e^{-3x}}{20 e^{x} e^{2x} e^{-3x}} = \frac{2}{5} e^{-2x} \sin x$$

$$v_3'(x) = \frac{2\sin x\, e^{x} e^{2x}}{20 e^{x} e^{2x} e^{-3x}} = \frac{1}{10} e^{3x} \sin x$$

İntegral Tablo'larından bilindiğine göre,

$$\int e^{ax} \sin x\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 1}(a \sin x - \cos x)$$

dır. Buna göre,

$$v_1 = -\frac{1}{2} \int e^{-x} \sin x\, dx = -\frac{1}{2} \frac{e^{-x}}{2}(-\sin x - \cos x)$$

$$= \frac{1}{4} e^{-x}(\sin x - \cos x)$$

$$v_2 = \frac{2}{5} \int e^{-2x} \sin x\, dx = \frac{2}{5} \frac{e^{-2x}}{5}(-2\sin x - \cos x)$$

$$= -\frac{2}{25} e^{-2x}(2\sin x - \cos x)$$

$$v_3 = \frac{1}{10}\int e^{3x}\sin x\,dx = \frac{1}{10}\frac{e^{3x}}{10}(3\sin x - \cos x)$$

$$= \frac{1}{100}e^{3x}(3\sin x - \cos x)$$

bulunur. Bu değerler yerlerine konulduğunda,

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2 + v_3y_3$$

$$= \frac{1}{4}e^{-x}(\sin x + \cos x)\,.\,e^{x} - \frac{2}{25}e^{-2x}(2\sin x + \cos x)\,.\,e^{2x}$$

$$+ \frac{1}{100}e^{3x}(3\sin x - \cos x)\,.\,e^{-3x}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$y_p = \frac{1}{100}[25\sin x + 25\cos x - 16\sin x - 8\cos x - 3\sin x - \cos x]$$

$$= \frac{1}{100}(12\sin x + 16\cos x) = \frac{1}{25}(3\sin x + 4\cos x)$$

elde edilir. Bu durumda genel çözüm,

$$y = y_c + y_p = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + c_3e^{-3x} + \frac{1}{25}(3\sin x + 4\cos x)$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri, "Parametrelerin Değişimi Metodunu" kullanarak çözünüz.

   (a) $y'' + y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

   (b) $y'' - 2y' + y = x^3e^{-3x}$

   (c) $y''' - y' = \sin x$

   (d) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$

   (e) $y'' - 3y' + 2y = e^{x}$

   (f) $y''' - y' = x$

(g) $y'' + 4y' + 4y = x^{-2} e^{-2x}$

(h) $y''' - 3y' + 2y = 2 (\sin x - 2 \cos x)$

(ı) $y''' + y' = \tan x$

(j) $y'' - y = \dfrac{2}{1 + e^x}$

(k) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin 2x}$

(l) $y'' - y = e^x$

(m) $y'' + 4y' - 4y = x^2 e^{-2x}$

2. Aşağıdaki denklemlerin herbirinde, homogen kısmın lineer bağımsız çözümleri verilmiştir. Denklemin genel çözümünü bulunuz.

(a) $(x^2 + 1) y'' - 2xy' + 2y = (x^2 + 1)^2$

$y_1 (x) = x, \quad y_2 (x) = x^2 - 1$

(b) $xy'' - (2x + 1) y' + (x + 1) y = 2x^2 e^x \ln x$

$y_1 (x) = e^x, \quad y_2 (x) = x^2 e^x$

(c) $xy'' - 2 (x + 1) y' + (x + 2) y = x^2 e^x$

$y_1 (x) = e^x, \quad y_2 (x) = \dfrac{1}{3} x^3 e^x$

3. Aşağıda verilen denklemde, $y (x) = x$ bir özel çözümdür. Denklemi çözünüz.

$(1 - x^2) y'' - xy' + y = 0$

4. Aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

(a) $x (x - 2) y'' - (x^2 - 2) y' + 2 (x - 1) y = 3x^2 (x - 2)^2 e^x$

$y_1 (x) = e^x, \quad y_2 (x) = x^2$

(b) $(2x + 1) (x + 1) y'' + 2xy' - 2y = (2x + 1)^2$

$y_1 (x) = x, \quad y_2 (x) = \dfrac{1}{x + 1}$

C. Operatör Metodu

Homogen olmayan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde üçüncü metod, Operatör Metodudur. Yukarıda görülen iki metod ile kıyaslandığında bu metod diferansiyel denklemlerin çözümünde daha çabuk sonuç vermektedir.

Operatör metodunun bir diğer ilginç yanı, ayrı bir bölüm olarak, Bölüm 8'de ele alınacak olan "Laplace Transformasyon Metodu" gibi çok güçlü bir metodun habercisi bir metod olmasıdır.

Bu bölümün "Giriş" kısmında görmüş olduğumuz gibi, n 'inci mertebeden sabit katsayılı homogen olmayan lineer bir diferansiyel denklem,

$$f(D)\, y = F(x) \tag{105}$$

şeklinde yazılır. Burada *f(D), n* 'inci dereceden sabit katsayılı bir polinom operatörüdür. Denk. 105'de, eşitliğin her iki tarafına da *1/f(D)* ters operatörünü uygularsak,

$$\frac{1}{f(D)} f(D)\, y = \frac{1}{f(D)} F(x)$$

$$y = \frac{1}{f(D)} F(x) \tag{106}$$

elde edilir. Bu fonksiyon, (105) numaralı diferansiyel denklemin bir özel çözümünden başka birşey değildir. *f (D)* operatörünü,

$$f(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$$

$$= (D - m_1)(D - m_2)(D - m_3) \ldots (D - m_{n-1})(D - m_n)$$

şeklinde yazabileceğimiz gözönüne alınırsa, Denk. 106,

$$y = \frac{1}{D - m_1} \cdot \frac{1}{D - m_2} \cdot \frac{1}{D - m_3} \cdots \frac{1}{D - m_{n-1}} \cdot \frac{1}{D - m_n} F(x)$$

şeklini alır. Bunun anlamı, önce F (x) fonksiyonuna $1/(D - m_n)$ operatörü uygulanacak ve böylece yeni bir fonksiyon, örneğin u (x) fonksiyonu elde edilecek, sonra u (x) fonksiyonuna $1/(D - m_{n-1})$ operatörü uygulanacak ve bunun sonunda yeni bir fonksiyon, örneğin bir v (x) fonksiyonu elde edilecek ve bu şekilde devam edilerek sonunda y (x) fonksiyonu elde edilecek demektir.

Yukarıda söylediklerimizi aşağıda görüldüğü şekilde daha açık olarak yazarsak,

$$u(x) = \frac{1}{D - m_n} F(x), \quad \frac{du}{dx} - m_n u = F(x), \quad u = e^{m_n x} \int F(x) e^{-m_n x}$$

$$v(x) = \frac{1}{D - m_{n-1}} u(x), \quad \frac{dv}{dx} - m_{n-1} v = u(x), \quad v = e^{m_{n-1} x} \int u(x) e^{-m_{n-1} x} dx$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$y = \frac{1}{D - m_1} w(x), \quad \frac{dy}{dx} - m_1 y = w(x), \quad y = e^{m_1 x} \int w(x) e^{m_1 x} dx$$

elde edilir. Bütün bu işlemler, tek bir işlem şeklinde, aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$y = e^{m_1 x} \int e^{(m_2 - m_1)x} \cdots \int e^{(m_n - m_{n-1})x} \int F(x) e^{-m_n x} (dx)^n \qquad (107)$$

Burada hemen söyliyelim ki, (107) fonksiyonu, Denk. 105 'in bir özel çözümüdür.

1/f(D) operatörünü tekrar gözönüne alalım. Biliyoruz ki bu operatör,

$$\frac{1}{f(D)} = \frac{N_1}{D - m_1} + \frac{N_2}{D - m_2} + \ldots + \frac{N_n}{D - m_n}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $N_1, N_2, \ldots, N_n$ bulunması gereken sayılardır. O zaman,

$$y = N_1 e^{m_1 x} \int F(x) e^{-m_1 x} dx + N_2 e^{-m_2 x} \int F(x) e^{-m_2 x} dx + \ldots$$

$$+ N_n e^{-m_n x} \int F(x) e^{-m_n x} dx \qquad (108)$$

elde edilir. Burada (107) veya (108) 'den hangisi bize daha uygun düşerse onu kullanırız; çünkü, her ikisi de aynı y_p çözümünü vermektedir.

f(D) ve *1/f(D)* operatörlerinin, çok sık rastlanan bazı fonksiyonlara uygulanması sonucu elde edilen fonksiyonları tanımak, önceden bilmek diferansiyel denklemin çözümünü bulmada pratik bakımdan bazı faydalar sağlamaktadır. Örneklere geçmeden önce, bu fonksiyonların bazıları aşağıda verilmiştir.

$$f(D)e^{ax} = e^{ax} f(a) \qquad (a)$$

$$(D - a)^n (x^n e^{ax}) = n! e^{ax} \qquad (b)$$

$$(D - a)^n F(x) = e^{ax} D^n [e^{-ax} F(x)] \qquad (c)$$

$$\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{f(a)}, \quad f(a) \neq 0 \qquad (d)$$

Eğer *f(a) = 0* ise, *f(D)* 'yi *(D – a)* çarpanına ayırabiliriz. Bu durumda f (D) operatörü

$$f(D) = g(D) (D - a)^n, \qquad g(a) \neq 0$$

şeklinde verilmiş olur. O zaman,

$g(D)(D-a)^n(x^n e^{ax}) - g(D)n!\,e^{ax} = g(a)\,n!\,e^{ax}$

yazılabilir. Öyle ise, $f(a) = 0$ olduğu zaman,

$$\frac{1}{g(D)(D-a)^n} e^{ax} = \frac{x^n e^{ax}}{n!\,g(a)}, \qquad g(a) \neq 0 \tag{e}$$

olur. Ayrıca

$$(D^2 + a^2) \sin bx = (a^2 - b^2) \sin bx, \qquad a \neq b$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\frac{1}{D^2 + a^2} \sin bx = \frac{\sin bx}{a^2 - b^2} \tag{f}$$

ve

$$\frac{1}{D^2 + a^2} \cos bx = \frac{\cos bx}{a^2 - b^2}, \qquad a \neq b \tag{g}$$

olur.

Son olarak $a = b$ olması durumunu gözönüne alalım.

$$\sin ax = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}, \qquad \cos ax = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}$$

ve

$$\frac{1}{D^2 + a^2} \sin ax = \frac{1}{2i} \frac{1}{(D - ia)(D + ia)} \left(e^{iax} - e^{-iax} \right)$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\frac{x e^{iax}}{1!\,2ia} - \frac{x e^{-iax}}{1!\,(-2ia)} \right)$$

$$= -\frac{x}{2a} \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}$$

olduğundan,

$$\frac{1}{D^2 + a^2} \sin ax = -\frac{x}{2a} \cos ax \tag{h}$$

$$\frac{1}{D^2 + a^2} \cos ax = \frac{x}{2a} \sin ax \tag{i}$$

olur.

Örnek 1. $Dy = x$

denklemini çözünüz.

$$y_p = \frac{1}{f(D)} F(x) = \frac{1}{D} x = \int x\,dx = \frac{1}{2} x^2$$

bulunur. Diğer taraftan homogen kısmın çözümü $y_c = c$ olduğundan, genel çözüm,

$$y = y_c + y_p = c + \frac{1}{2} x^2$$ bulunur.

Örnek 2. $y'' - y = e^{-x}$

denklemini çözünüz.

Diferansiyel denklemi önce "operatör" kullanarak yazalım.

$$(D^2 - 1)\, y = (D - 1)(D + 1)\, y = e^{-x}$$

olur. Denklemin homogen kısmının genel çözümü,

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

dır. Operatör metodu kullanarak,

$$y_p = \frac{1}{D - 1} \cdot \frac{1}{D + 1} e^{-x}$$

yazılır. Buradan,

$$u = \frac{1}{D + 1} e^{-x}, \quad \frac{du}{dx} + u = e^{-x}, \quad u = e^{-x} \int e^{-x} . e^x\,dx = x e^{-x}$$

$$y = \frac{1}{D - 1} x e^{-x}, \quad \frac{dy}{dx} - y = x e^{-x}, \quad y = e^x \int x e^{-x} . e^{-x}\,dx$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\int x e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)$$

olduğundan

$$y = e^x \int x e^{-2x}\,dx = e^x . e^{-2x}\left(\frac{x}{-2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x}$$

elde edilir. Buna göre genel çözüm,

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{-x} - \frac{1}{4}\ e^{-x} - \frac{1}{2}\ xe^{-x}$$

veya

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} - \frac{1}{2}\ xe^{-x} \qquad \text{olur.}$$

Örnek 3. $(D^2 + 4D + 4)y = x^3 e^{-2x}$

denklemini çözünüz.

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4D + 4}\ x^3 e^{-2x} = \frac{1}{(D+2)(D+2)}\ x^3 e^{-2x}$$

olur. Buradan açıkça görülmektedir ki,

$$y_c = (c_1 + c_2x)\ e^{-2x}$$

dır. Diğer taraftan, Denk. 107 'ye göre,

$$y_p = e^{-2x} \int e^{[-2-(-2)]x} \int x^3 e^{-2x} e^{2x}\ (dx)^2$$

$$= e^{-2x} \iint x^3 e^{-2x} e^{2x}\ dx\,dx = e^{-2x} \int \left[\int x^3\,dx \right] dx$$

$$y_p = \frac{1}{4}\ e^{-2x} \int x^4\ dx = \frac{1}{20}\ x^5 e^{-2x}$$

Buna göre genel çözüm,

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + \frac{1}{20}\ x^5 e^{-2x}$$

$$= (c_1 + c_2x + \frac{1}{20}\ x^5)e^{-2x} \qquad \text{bulunur.}$$

Örnek 4. $(D^2 - 3D + 2)y = e^x$

denklemini çözünüz.

Verilen diferansiyel denklem,

$$y = \frac{1}{f(D)}\ e^x = \frac{1}{(D-1)(D-2)}\ e^x$$

şeklinde yazılabilir. Burada açıkça görülmektedir ki,

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

dır. Diğer taraftan,

$$y_p = e^x \int e^{(2-1)x} \int e^x e^{-2x} \, (dx)^2$$

$$= e^x \int e^x \left[\int e^{-x} dx \right] dx = -e^x \int e^x . e^{-x} dx$$

$$= -xe^{-x}$$

bulunur. Buna göre genel çözüm,

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^{-x}$ olur.

Örnek 5. $(D^2 - D + 1)y = x^3 - 3x^2 + 1$

denklemini çözünüz.

$$y = \frac{1}{D^2 - D + 1} (x^3 - 3x^2 + 1) = (1 + D - D^3 - D^4 + D^6 + \ldots)(x^3 - 3x^2 - 1)$$

$$y_p = (x^3 - 3x^2 + 1) + (3x^2 - 6x) - (6) + 0$$

$$= x^3 - 6x - 5$$

bulunur. Buna göre genel çözüm,

$$y = (c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x) e^{\frac{1}{2}x} + x^3 - 6x - 5 \quad \text{olur.}$$

Örnek 6. $(D^3 + 3D^2 - 4)y = xe^{-2x}$

denklemini çözünüz.

$$(D - 1)(D + 2)^2 y = xe^{-2x}$$

$$y_c = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x)e^{-2x}$$

$$y_p = e^x \int e^{(-2-1)x} \int e^0 \int x e^{-2x} e^{2x} (dx)^3$$

$$= e^x \int e^{-3x} \iint x \, (dx)^3$$

$$= e^x \int e^{-3x} \int \frac{x^2}{2} (dx)^2$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3} e^x \int e^{-3x} x^3 dx$$

$$= -\frac{1}{18} e^{-2x} \left(x^3 + x^2 + \frac{2}{3} x + \frac{2}{9} \right)$$

bulunur. Genel çözüm,

$$y = c_1e^x + (c_2 + c_3x)e^{-2x} - \frac{1}{18}(x^3 + x^2)e^{-2x} \quad \text{olur.}$$

Örnek 7. $(D^2 - 3D - 2)y = e^{5x}$

denklemini çözünüz.

$$(D - 1)(D - 2)y = e^{5x}$$

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

Bu örnekte, y_p 'nin değerini (108) denklemini kullanarak bulmaya çalışalım.

$$\frac{1}{f(D)} = \frac{1}{(D - 1)(D - 2)} = \frac{N_1}{D - 1} + \frac{N_2}{D - 2}$$

Buradan, $N_1 = -1$ ve $N_2 = 1$ bulunur. O zaman,

$$y_p = -e^x \int e^{5x} \cdot e^{-x}\,dx + e^{2x} \int e^{5x} \cdot e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}e^{5x} + \frac{1}{3}e^{5x} = \frac{1}{12}e^{5x}$$

Genel çözüm,

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{12}e^{5x} \quad \text{olur.}$$

Örnek 8. $(D^2 + 5D + 4)y = 3 - 2x$

denklemini çözünüz.

$$(D^2 + 5D + 4)y = (D + 1)(D + 4)y = 3 - 2x$$

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{-4x}$$

$$y_p = e^{-x} \int e^{(-4+1)x} \int (3 - 2x)e^{4x}(dx)^2$$

$$y_p = e^{-x} \int e^{-3x} \left[\int (3 - 2x)e^{4x}\,dx \right] dx \qquad (109)$$

önce köşeli parantez içindeki integral alınırsa,

$$(3 - 2x)e^{4x}\,dx = \frac{3}{4}e^{4x} - 2\int xe^{4x}\,dx$$

$$= \frac{3}{4}e^{4x} - 2\left[e^{4x}\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{16}\right)\right] = \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\right)e^{4x}$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{4x} + \frac{7}{8}e^{4x}$$

bulunur. Bu değer, Denk. 109 'da yerine konulduğunda,

$$y_p = e^{-x}\int e^{-3x}\left(-\frac{1}{2}xe^{4x}+\frac{7}{8}e^{4x}\right)dx$$

$$= e^{-x}\int\left(\frac{7}{8}e^{x}-\frac{1}{2}xe^{x}\right)dx = e^{-x}\left(\frac{7}{8}e^{x}-\frac{1}{2}xe^{x}+\frac{1}{2}e^{x}\right)$$

$$= \frac{11}{8}-\frac{1}{2}x$$

elde edilir. Denklemin genel çözümü,

$$y = c_1e^{-x}+c_2e^{-4x}+\frac{11}{8}-\frac{1}{2}x \qquad \text{bulunur.}$$

Örnek 9. $(D^2+1)y = e^{-3x}$

denkleminin homogen olmayan kısmının bir özel çözümünü bulunuz.

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{f(a)}, \qquad f(a)\neq 0$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}e^{-3x} = \frac{1}{3^2+1}e^{-3x} = \frac{1}{10}e^{-3x} \qquad \text{bulunur.}$$

Örnek 10. $D^2(D+1)(D-1)^3y = e^x$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{1}{g(D)(D-a)^n}e^{ax} = \frac{x^n e^{ax}}{n!\,g(a)}, \qquad g(a)\neq 0$$

bağıntısı gözönüne alındığında, yukarıda verilen denklem için n = 3 ve a = 1 olduğu görülür. Buna göre,

$$y_p = \frac{1}{D^2(D+1)(D+1)^3}e^{x} = \frac{x^3e^{x}}{3!\,1^2(1+1)}$$

$$y_p = \frac{1}{12}x^3e^{x}$$

bulunur. Denklemin genel çözümü

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + (c_4 + c_5x + c_6x^2)e^x + \frac{1}{2}x^3e^x$$

olur.

Örnek 11. $(D^2 + 4)y = \cos 2x$

denklemini çözünüz.

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına $1/(D^2 + 2^2)$ operatörü uygulanırsa,

$$y_p = \frac{1}{(D^2 + 2^2)} \cos 2x = \frac{x}{4} \sin 2x$$

elde edilir. Denklemin genel çözümü,

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{4} \sin 2x$$

olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri, "Operatör Metodu"nu kullanarak çözünüz.
   (a) $(D^2 - 4)y = e^{-2x}$
   (b) $(D^2 + 1)y = 2 \sin x$
   (c) $(4D^2 - 1)y = x^3$
   (d) $D^2 (D - 1)^3y = 3e^{-2x}$
   (e) $(D^2 + 4)y = \cos x$
   (f) $(D^2 + 4)y = \sin 2x$
   (g) $(D^2 - 4)y = 3e^{2x} + 4e^{-x}$
   (h) $(D^2 + 3)y = x^2e^{3x}$
   (ı) $(D^2 + 1)y = xe^x \cos 2x$
   (j) $(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)y = x^2e^{-x}$
   (k) $(D^2 - 3D + 2)y = x$
   (l) $(D^3 + D)y = \sin 2x$
   (m) $(D^2 + D - 2)y = e^{-x}$
   (n) $(D - 3)(D - 1)(D + 2)y = 3e^x - 2$
   (o) $(D - 1)^2y = 1$
   (p) $(D^2 + 36)y = \cos 6x$

2. Eğer $F(x) = (x - a)^n g(x)$ ise, $F^{(n)}(a) = n!g(a)$ olduğunu ispatlayınız.

4-5 CAUCHY - EULER DENKLEMİ

Yüksek mertebeden değişken katsayılı herhangi bir homogen lineer diferansiyel denklemin çözümünü bir cebirsel fonksiyon cinsinden veren belirli bir metod mevcut değildir ve genel olarak böyle bir denklemi çözmek oldukça güçtür. Bazı istisnalar olmakla birlikte bu çeşit denklemlerin yalnız kuvvet serileri cinsinden çözümlerini bulmak mümkün olmaktadır. Bu konu ileride ele alınacaktır.

Aşağıda verilen denklemin, değişken katsayılı denklemler arasında özel bir yeri vardır. Çünkü bu denklem, bir değişken değiştirme ile sabit katsayılı bir lineer denkleme dönüşmekte ve kolayca çözülmektedir.

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x) \qquad (110)$$

Burada $a_0 \neq 0$ olmak üzere, a_0, a_1, a_2, ..., a_n, herhangi sabit katsayılardır. Bu denklem herhangi bir değişken katsayılı denklem değildir. Açıkça görülmektedir ki, denklemin bütün terimleri

$$c x^k \frac{d^k y}{dx^k}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

şeklinde terimlerden oluşmaktadır. Burada c herhangi bir sabit sayıdır ve her terim için farklı değer alabilir. Bu durumda bu denkleme, **Cauchy - Euler Diferansiyel Denklemi** denir.

Yukarıda da belirtilmiş olduğu gibi bu denklem, $x = exp\ (t)$ değişken değiştirmesi sonucu sabit katsayılı homogen olmayan lineer bir diferansiyel denkleme dönüşür.

$$x = e^t, \qquad t = \ln x \text{ ise } \frac{dx}{dt} = e^t \qquad \text{ve} \qquad \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

olduğundan, $D = \frac{d}{dt}$ göstermek üzere,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t} Dy$$

ve

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\frac{d^2 t}{dx^2} = e^{-2t}\left(D^2 - D\right) y$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[e^{-2t}\left(D^2 - D\right) y\right] = \frac{d}{dt}\left[e^{-2t}\left(D^2 - D\right) y\right] \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= e^{-t}\left[-2e^{-2t}\left(D^2 - D\right) y + e^{-2t} D\left(D^2 - D\right) y\right]$$

$$= e^{-3t}\left(D^3 - 3D^2 + 2D\right) y$$

bulunur. Türev alma işlemine bu şekilde devam edilir. Sonuç olarak,

$$x \frac{dy}{dx} = Dy$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D - 1) y$$

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = D(D - 1)(D - 2) y$$

$$\vdots$$

$$x^n \frac{d^ny}{dx^n} = D(D - 1)(D - 2) \ldots (D - n + 1) y$$

elde edilir. Bu değerler, *Cauchy-Euler* denkleminde yerlerine konursa,

$$\left[a_0 D(D - 1) \ldots (D - n + 1) + a_1 D(D - 1) \ldots (D - n + 2) + \ldots\right.$$

$$\left. + a_{n-1} D + a_n\right] y = F(e^t)$$

olur. Köşeli parantez içi, sabit katsayılı bir diferansiyel polinom operatöründen başka birşey değildir. Bu operatör *f(D)* ile gösterilirse,

$$f(D)y = G(t) \qquad (111)$$

elde edilir. Bu denklem, serbest değişken *t* olmak üzere, sabit katsayılı homogen olmayan bir lineer diferansiyel denklemdir ve (105) denklemi ile eşdeğer anlamdadır.

Örnek 1. $x^3 \frac{d^3}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} - y = x^3$ denklemini çözünüz.

$x = e^t$ değişken değiştirmesi sonucu gerekli işlemler yapılırsa,

$$\left[D(D - 1)(D - 2) + D - 1\right] y = e^{3t}$$

$$(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = e^{3t} \qquad (112)$$

elde edilir. Burada, karakteristik denklemin kökleri $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ olduğundan,

$$y_c = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)\, e^t$$

elde edilir.

Yukarıda ayrıntılı olarak tartışılmış bulunan üç metod 'dan birisi, örneğin "Belirsiz Katsayılar Metodu" kullanılarak, denklemin homogen olmayan kısmının bir özel çözümü olan y_p aşağıdaki şekilde bulunur.

$$y_p = Ae^{3t}, \quad y_p' = 3Ae^{3t}, \quad y_p'' = 9Ae^{3t}, \quad y_p''' = 27\,Ae^{3t}$$

olduğundan, (112) 'de yerlerine konursa,

$$27A - 27A + 9A - A = 1$$

$$8A = 1, \qquad A = \frac{1}{8}$$

bulunur. Buna göre,

$$y_p = \frac{1}{8}\, e^{3t}$$

olur. Verilen denklemin genel çözümü,

$$y = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)\, e^t + \frac{1}{8}\, e^{3t}$$

veya

$$y = \left[c_1 + c_2 \ln x + c_3 (\ln x)^2 \right] x + \frac{1}{8}\, x^3$$

elde edilir.

Örnek 2. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x \dfrac{dy}{dx} + 2y = \ln x$

denklemini çözünüz.

$x = e^t$ ve $t = \ln x$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\left[D(D-1) + 4D + 2 \right] y = t$$

$$(D^2 + 3D + 2)y = t \qquad (113)$$

elde edilir. Karakteristik denklemin kökleri $m = -1,\ m = -2$

$$y_c = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

olur. Belirsiz Katsayılar Metodu kullanılırsa,

$$y_p = At + B, \qquad y_p' = A, \qquad y_p'' = 0$$

olur. Denk. 113 'de yerlerine konursa,

$$(0 + 3A + 2At + 2B) = t$$

$$2A = 1$$

$$3A + 2B = 0, \quad A = \frac{1}{2} \quad , \quad B = -\frac{3}{4}$$

$$y_p = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$$

bulunur. Genel çözüm,

$$y = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$$

$$y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{4} \qquad \text{bulunur.}$$

Örnek 3. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x \ln x$

$x = e^t$ ve $t = \ln x$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$[\, D(D-1) - 2D + 2 \,]\, y = te^t$$

$$(D^2 - 3D + 2)y = te^t \qquad (114)$$

elde edilir. Burada, karakteristik denklemin kökleri, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ olduğundan,

$$y_c = c_1e^t + c_2e^{2t}$$

olur. Parametrelerin Değişimi Metodu kullanılırsa,

$$y_p = v_1e^t + v_2e^{2t} \qquad (115)$$

$$y_p' = v_1e^t + 2v_2e^{2t} + v_1'e^t + v_2'e^{2t}$$

elde edilir. Burada,

$$v_1'e^t + v_2'e^{2t} = 0 \qquad (116)$$

$$y_p'' = v_1e^t + 4v_2e^{2t} + v_1'e^t + 2v_2'e^{2t}$$

olur. Bu değerler (114) denkleminde yerlerine konursa

$$y_p'' = v_1e^t + 4v_2e^{2t} + v_1'e^t + 2v_2'e^{2t}$$

$$-3y_p' = -3v_1e^t - 6v_2e^{2t}$$

$$2y_p = 2v_1e^t + 2v_2e^{2t}$$

$+$

$$te^t = v_1(e^t - 3e^t + 2e^t) + v_2(4e^{2t} - 6e^{2t} + 2e^{2t}) + v_1'e^t + 2v_2'e^{2t}$$

elde edilir. Burada, eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki terim "sıfır" olduğundan,

$$v_1'e^t + 2v_2'e^{2t} = te^t \qquad (117)$$

bulunur. Denk. 116 ve 117 birlikte çözümlenirse,

$$v_1' = -t, \qquad v_1 = -\frac{1}{2}t^2$$

ve

$$v_2' = te^{-t}, \qquad v_2 = e^{-t}\left(\frac{t}{-1} - \frac{1}{(-1)^2}\right)$$

$$= -e^{-t}(t+1)$$

elde edilir. v_1 ve v_2 'nin bu değerleri, Denk. 115 'de yerlerine konursa,

$$y_p = -\frac{1}{2}t^2e^t - e^{-t}(t+1)e^{2t}$$

$$y_p = -\left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1\right)e^t$$

elde edilir. Verilen diferansiyel denklemin genel çözümü ise,

$$y = y_c + y_p = c_1e^t + c_2e^{2t} - \left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1\right)e^t$$

$$= c_1e^t + c_2e^{2t} - \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)e^t$$

$$y = c_1x + c_2x^2 - x\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x\right] \qquad \text{olur.}$$

Örnek 4. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3$

denklemini çözünüz.

$x = e^t$ ve $t = \ln x$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$[D(D-1)(D-2) - D(D-1) + 2D - 2]y = e^{3t}$$

$$(D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = e^{3t} \qquad (118)$$

elde edilir. Bu denklemin homogen kısmının karakteristik denklemi,

$$m^3 - 4m^2 + 5m - 2 = 0, \qquad m = 1, 1, 2$$

bulunur. Buradan,

$$y_c = (c_1 + c_2t)e^t + c_3e^{2t} \qquad \text{olur.}$$

Belirsiz katsayılar metodu kullanılarak y_p bulunur.

$$y_p = Ae^{3t}$$

$y_p' = 3Ae^{3t}, \quad y_p'' = 9Ae^{3t}, \quad y_p''' = 27Ae^{3t}$

Bu değerler Denk. 118 'de yerlerine konursa,

$$(27Ae^{3t} - 36Ae^{3t} + 15Ae^{3t} - 2Ae^{3t}) = e^{3t}$$

$$4A = 1, \quad A = \frac{1}{4}$$

$$y_p = \frac{1}{4} e^{3t}$$

elde edilir. Genel çözüm,

$$y = y_c + y_p = (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t} + \frac{1}{4} e^{3t}$$

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x^2 + \frac{1}{4} x^2 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 5. $(2x - 3)^2 y'' - 6(2x - 3)y' + 12y = 0$

Biraz karışık görünümü olmakla beraber ufak bir transformasyonla yukarıdaki denklemin bir Cauchy - Euler diferansiyel denklemine dönüştüğü görülür.

$z = (2x - 3), \quad dz/dx = 2$

ve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 2\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) = 2\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dz} = 2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dz}{dx}$$

$$= 4\frac{d^2y}{dz^2}$$

Bu değerler denklemde yerlerine konursa,

$$4z^2\frac{d^2y}{dz^2} - 12z\frac{dy}{dz} + 12y = 0 \qquad (119)$$

elde edilir. Denk. 119, bir Cauchy-Euler dif. denklemidir. $z = e^t$ ve $t = \ln z$ transformasyonu yapılırsa,

$$[\,4D(D - 1) - 12D + 12\,]\,y = 0$$

$$(4D^2 - 16D + 12)y = 0$$

veya

$$(D^2 - 4D + 3)\, y = 0$$

elde edilir. Bu denklem, sabit katsayılı homogen lineer bir diferansiyel denklemdir. Karakteristik denklemin kökleri $m = 1, 3$ olduğundan, genel çözüm,

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{3t}$$

$$y(z) = c_1 z + c_2 z^3$$

ve

$$y(x) = c_1 (2x - 3) + c_2 (2x - 3)^3 \qquad \text{bulunur.}$$

Örnek 6. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x \dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$

$$[\, D(D-1) - 4D + 6 \,]\, y = 0$$

$$(D^2 - 5D + 6)\, y = 0$$

Karakteristik denklemin kökleri $m = 2, 3$ ve denklemin genel çözümü

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3$$

bulunur. Sınır şartları uygulanırsa, genel çözüm,

$$0 = 4c_1 + 8c_2$$

$$4 = 4c_1 + 12c_2 \;,\; c_2 = 1 \text{ ve } c_1 = -2 \qquad \text{bulunur.}$$

$$y(x) = -2x^2 + x^3$$

elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen Cacuhy-Euler dif. denklemini çözünüz.

a. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x \dfrac{dy}{dx} + 2y = \ln x$

b. $x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} - 4x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 5x \dfrac{dy}{dx} - 2y = 1$

c. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x^2$

d. $x^2 y'' - 3x y' + 3y = 0$

e. $x^3 y''' - x^2 y'' - 6x y' + 18y = 0$

f. $x^2 y'' - 2y = x$

g. $x^2 y'' + 5x y' + 4y = x^2 + (\ln x)^2$

h. $x^3 y''' + 3x^2 y'' = 1 + x$

2. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a. $(2x+3)^2 y'' + (2x+3) y' - 2y = 24x^2$

b. $(x+2)^2 y'' - (x+2) y' + y = 4$

c. $(x+2)^2 y'' - (x+2) y' - 3y = 0$

d. $x^2 y'' - 2x y' - 10y = 0$, $y(1) = 5$, $y'(1) = 4$

e. $x^2 y'' - 6y = \text{Ln}\, x$, $y(1) = 1/6$, $y'(1) = -1/6$

f. $x^2 y'' + 3x y' - 3y = x^2 - 4x + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

BÖLÜM 5

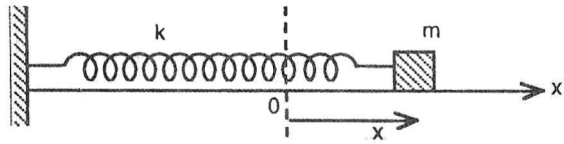
Sabit Katsayılı İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları

Yüksek mertebeden diferansiyel denklemler arasında ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler çok önemli uygulamaları olan denklemlerdir. Örneğin, fizikte, mekanikte ve elektrikte görülen titreşim hareketlerinin incelenmesinde ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerle karşılaşılır. Bu problemlerden bazılarının çözümü aşağıda ele alınacaktır.

5-1 SALINIM HAREKETİ

Kütlesi ihmal edilebilen ve esneklik katsayısı k olan bir çelik yay bir ucundan tavana tutturulmuş olsun. Yayın serbest ucuna kütlesi m olan bir cisim asılmıştır. Sistem denge konumuna geldikten sonra cisim bir miktar aşağı doğru çekilir ve serbest bırakılırsa, denge konumu etrafında yukarı-aşağı bir gidip-gelme hareketi yapar ki, bu harekete **salınım hareketi** veya "titreşim hareketi" denir. Eğer hava direnci ihmal edilirse, başka deyişle sürtünme yok kabul edilirse, cisim yukarıda ve aşağıda aynı limitler arasında bir gidip-gelme hareketi yapacaktır ki, buna **basit harmonik hareket** denir. Eğer sürtünme varsa, cismin salınım hareketinin genliği gittikçe azalacak ve bir süre sonra cisim denge konumuna gelip duracaktır. Cismin bu tür salınım hareketine, serbest sönümlü titreşim hareketi denir. Bundan başka, bazen cisme devamlı ve sinüsoidal bir fonksiyonla ifade edilebilen bir ilave harmonik kuvvet etki edebilir. Bu durumda cismin hareketi zorlanmış sönümlü titreşim hareketi olur.

A. Basit Harmonik Hareket



Şekil 1

Şekil 1'de görüldüğü gibi, m kütleli cisim, yatay ve sürtünmesiz bir düzlem üzerinde ve x-ekseni doğrultusunda, O denge konumu etrafında bir gidip gelme hareketi, "salınım hareketi" yapmakta olsun. Cisim denge konumundan x uzaklığında bulunduğu sırada cisme etki eden tek kuvvet, Hook kanunu ile ifade edilen ve her zaman cismi O denge konumuna çağırmaya yönelik olan,

$$F = -kx \tag{1}$$

kuvvetidir. Burada görülen (–) işaretinin anlamı, cisim denge konumunun sağında olduğu zaman geri çağırma kuvveti sola doğru yönelmiş, denge konumunun solunda olduğu zaman da geri çağırma kuvveti sağa doğru yönelmiş demektir. Bu durumda cismin hareketi serbest ve sönümsüz bir titreşim hareketi, başka bir deyişle bir basit harmonik hareket olur. Bu hareketin denklemi,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{2}$$

veya

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\omega_0^2 = k/m$ 'dir.

Önceden biliyoruz ki, bu denklemin genel çözümü,

$$x = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t \tag{4}$$

dır. c_1 ve c_2 başlangıç şartları kullanılarak bulunur.

Cisim denge konumundan x_0 uzaklığında bulunduğu sırada ilk hızsız olarak harekete bırakılmış olsun. Buna göre başlangıç şartları $x(0) = x_0$ ve $x'(0)$ olur. Bu durumda Denk. 3 'ün genel çözümü,

$$x = x_0 \cos \omega_0 t \tag{5}$$

olur.

Başlangıç şartlarına bağlı olarak, (3) denkleminin çözümü, genel olarak,

$$x = c \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada c ve φ birer integrasyon sabitidir. Genel çözümün "sinüs" veya "kosinüs" fonksiyonu olması da aynı şekilde başlangıç şartlarına bağlıdır.

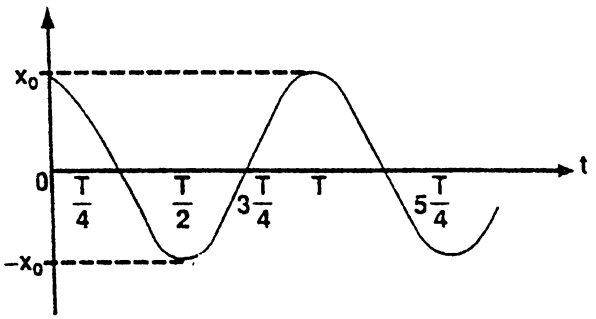
Cismin denge konumu etrafında bir tam devir yapması için geçen zaman T ile ve bir saniye içindeki devir sayısı f ile gösterilirse,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

olduğundan, (5) denklemi,

$$x = x_0 \cos \frac{2\pi}{T} t \qquad (6)$$

şeklini alır. Bu durumda, zamana bağlı olarak cismin bulunduğu yer, Şekil 2'de



Şekil 2

görülen grafikte gösterilmiştir.

Cisim harekete başladıktan sonra herhangi bir t anındaki hızı,

$$\frac{dx}{dt} = -\omega_0 x_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$$

denklemi ile ifade edilir. t'nin özel bir değeri için, örneğin $t = T/4$, veya daha genel olarak,

$$t = (2n-1)\frac{T}{4}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

için hız, $v_0 = \omega_0 x_0$ olur. Bu hız cismin maksimum hızıdır ve her geçişinde cisim denge konumundan bu hızla geçer.

Şimdi ise cismin bulunduğu yere bağlı olarak hızını bulmaya çalışalım. Enerjinin korunumu prensibine göre,

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

yazabiliriz. Buradan,

$$v = \pm \omega_0 \sqrt{x_0^2 - x^2}$$

bulunur.

B. Serbest Sönümlü Titreşim Hareketi

Bir nokta etrafında basit, sinüsoidal titreşim hareketleri yapmakta olan bir cisim genel olarak bir sürtünme kuvvetinin etkisi altında kalabilir. Örneğin, cisim sürtünmeli bir yatay düzlem üzerinde veya viskozluk derecesi ihmal edilemeyen bir sıvı içinde hareket ediyor olabilir. Cismin hareketini geciktirici yönde etkili olan böyle bir kuvvet, büyük bir yaklaşımla cismin o andaki hızı ile orantılıdır. Orantılık katsayısı R ile gösterilmek üzere, bu durumda cismin hareket denklemi,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + k x = 0 \qquad (7)$$

veya,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada R, m ve ω_0 bilinen sayılar olduğundan, (8) denklemi ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemdir. Yardımcı denklem

$$\lambda^2 + (R/m)\lambda + \omega_0^2 = 0$$

ve bu denklemin kökleri,

$$\lambda_1 = -R/2m + \sqrt{(R/2m)^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = -R/2m - \sqrt{(R/2m)^2 - \omega_0^2}$$

olduğundan, Denk. 8'in genel çözümü,

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$$= Ae^{(-R/2m)t} e^{\sqrt{(R/2m)^2 - \omega_0^2}\, t} + Be^{(-R/2m)t} e^{-\sqrt{(R/2m)^2 - \omega_0^2}\, t}$$

$$= e^{-(R/2m)t} \left[A e^{\sqrt{(R/2m)^2 - \omega_0^2}\, t} + B e^{-\sqrt{(R/2m)^2 - \omega_0^2}\, t} \right]$$

olur. Burada,

$$\Delta = (R/2m)^2 - \omega_0^2$$

diskrimantının aldığı üç farklı değere bağlı olarak, cismin titreşim hareketi üç farklı şekilde olmaktadır.

(a) $\Delta < 0$ Bu demektir ki, $\omega_0^2 > \left(\frac{R}{2m}\right)^2$

veya kısaca $w>R/2m$ olsun.

Bu durumda,

$$(R/2m) - \omega_0^2 = -\omega_1^2$$

ile gösterilirse, ki burada ω_0^2 pozitif bir sayıdır, o zaman Denk. 8'in genel çözümü,

$$x = e^{-(R/2m)t}\,(Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t}) \qquad (9)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada A ve B kompleks sayılardır. (9) denklemi yeniden düzenlenirse,

$$= e^{-(R/2m)t}\,[A(\cos\omega_1 t + i\sin\omega_1 t) + B(\cos\omega_1 t - i\sin\omega_1 t)]$$
$$= e^{-(R/2m)t}\,[(A+B)\cos\omega_1 t + i(A-B)\sin\omega_1 t]$$

olur. a ve b reel sayılar olmak üzere, eğer

$A = a + ib$ ve $B = a - ib$ ise,

$A + B = 2a$ ve $i(A - B) = -2b$

olacağından, genel çözüm

$$x = -e^{-(R/2m)t}\,(2a\cos\omega_1 t - 2b\sin\omega_1 t)$$

şeklini alır. Burada, $2a = c\cos\varphi$ ve $2b = c\sin\varphi$ olmak üzere,

Denk. 8 'in genel çözümü,

$$x = ce^{-(R/2m)t}\cos(\omega_1 t + \varphi) \qquad (10)$$

$$x = ce^{-(R/2m)t}\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{R}{2m}\right)^2}\,t + \varphi\right]$$

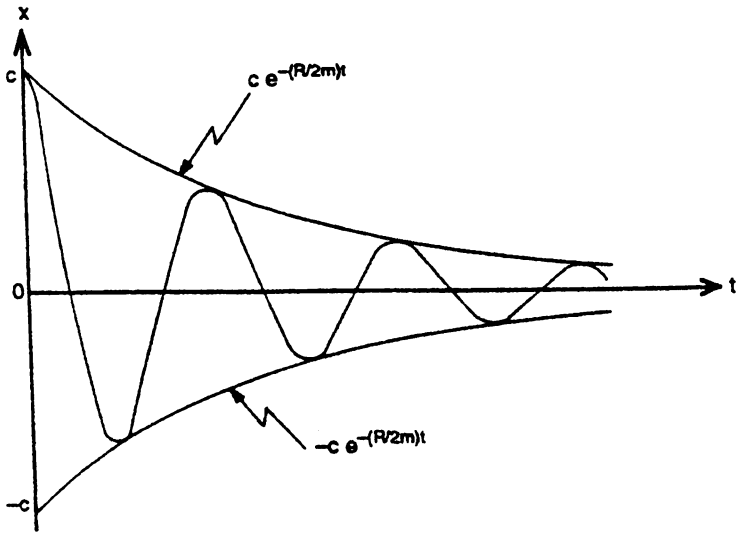
olur. Burada c ve φ , keyfi sabit değerler olmak üzere integrasyon sabitleridir. Hemen ifade edelim ki, c_1 ve c_2 iki ayrı keyfi sabit sayı olmak üzere (10) denklemi,

$$x = e^{-(R/2m)t}\,(c_1\cos\omega_1 t + c_2\sin\omega_1 t)$$

şeklinde yazılabilir.

Denk. 10 açıkça göstermektedir ki cisim açısal hızı ω_1 olan bir titreşim hareketi yapmaktadır. Bu hareketin basit hormonik hareketten farkı, hareketin genliği sabit değildir ve zamanla küçülmektedir. Onun için bu harekete **sönümlü titreşim hareketi** denir.

Denk. 10 'un grafiği Şekil 3 'de gösterilmiştir. Burada açıkça görülüyor ki,



Şekil 3

$\omega_1 t + \varphi = n\pi$, $(n = 0, 1, 2, ...)$ denkleminin kökleri olan t değerleri, $A(t) = \pm ce^{-(R/2m)t}$ fonksiyonunda yerine konularak, sönümlü salınım hareketinin genliğinin zamanla nasıl değiştiği bulunmuş olur.

Özet olarak denilebilir ki, $R < 2\sqrt{km}$ olması halinde sistem sönümlü titreşim hareketi yapmaktadır ve bu hareketin frekansı

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - (R/2m)^2}$$

dir. Eğer R = 0 olsaydı normal harmonik hareketin frekansı, $1/2\,\pi\sqrt{k/m}$ elde edilirdi. Bu demektir ki, sönümlü titreşim hareketinin frekansı, normal hormonik hareketin frekansından daha küçüktür.

(b) $\Delta > 0$ veya $\omega_0^2 < (R/2m)^2$

Bu durumda, $(R/2m)^2 - \omega_0^2 = \omega_1^2$ ile gösterilirse, denklemin genel çözümü,

$$x = e^{-(R/2m)t}\,(Ae^{\omega_1 t} + Be^{-\omega_1 t}) \qquad (11)$$

olur. Görülüyor ki bu genel çözüm, exponansiyel çözümlerin bir lineer kombinasyonudur ve bu nedenle titreşim hareketi beklenemez. Burada $t \to \infty$ için $x = 0$ olacaktır. R 'nin yeter derecede büyük olması bu sonucu doğuracak ve cisim yavaş yavaş denge konumuna geri dönecektir.

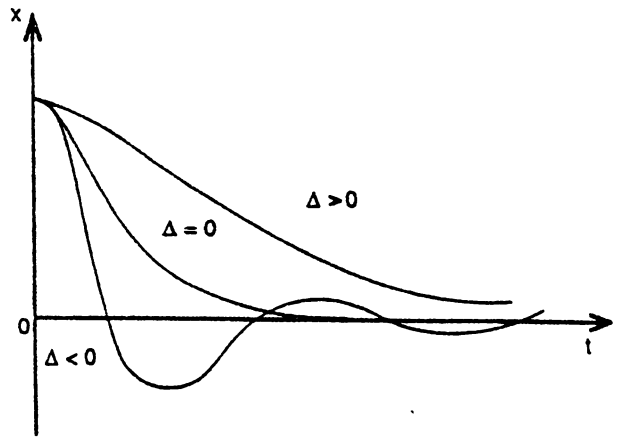
(c) $\Delta = 0$ veya $\omega_0^2 = (R/2m)^2$

Bu durumda, $\omega_1 = 0$ 'dır ve Denk. 8 'in genel çözümü,

$$x = e^{-(R/2m)t}\,(A + Bt) \qquad (12)$$

olur. Görülüyor ki, $\Delta = 0$ halinde cismin hareketi bir titreşim hareketi değildir. Denge konumundan x_0 uzaklığında serbest bırakılan cisim en kısa zamanda denge konumuna geri dönecektir. Burada önemle üzerinde durulması gereken husus, R değerinde meydana gelebilecek küçük bir azalma halinde cisim derhal sönümlü titreşim haline geçebilir. Bu nedenle, $\Delta = 0$ olması halinde cismin hareketine "kritik sönümlü titreşim hareketi" denir.

Δ 'nin değerine bağlı olarak yukarıda kısaca gözönüne almış olduğumuz her üç hareket türü Şekil 4 'de birlikte gösterilmiştir.



Şekil 4

C. Zorlanmış Sönümlü Titreşim Hareketi

Yukarıda incelediğimiz serbest sönümlü titreşim hareketine geri dönelim ve cisme dışarıdan etki etmekte olan sürtünme kuvveti veya başka bir deyişle "sönüm" kuvvetine ek olarak bu defa da, cisme devamlı olarak bir periodik (sinüsoidal) kuvvetin, örneğin $F(t) = F_0 \cos \omega t$ kuvvetinin etki etmekte olduğunu düşünelim. O zaman, m kütleli cismin hareket denklemi,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \qquad (13)$$

olur. Burada, m, k, R, F_0 ve ω bilinen değerlerdir. Şek. 5 'e bakınız.

Denk. 13 'de bütün terimler m ile bölünürse,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \qquad (14)$$

elde edilir. Görülüyor ki bu denklem, ikinci mertebeden, homogen olmayan, sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemdir.

Hemen ifade edelim ki, Denk. 14 'ün çok sayıda birbirinden farklı çözümü vardır ve biz bunlardan yalnız bir tanesini bulmaya çalışacağız. Örneğin, R 'nin yeter derecede küçük olması, başka bir deyişle $\Delta < 0$ olması halini gözönüne alacağız. Bu durumda, Denk. 14 'ün homogen kısmı açıkça gösteriyor ki, $F(t)$ kuvveti yok kabul edildiğinde cisim denge konumu etrafında sabit frekansla sönümlü bir titreşim hareketi yapacaktır. Burada ayrıca kabul ediyoruz ki, titreşim hareketinin frekansı, $F(t)$ kuvvetinin frekansı ω'ya eşittir.

Şimdi, Denk. 14 'ün çözümünü ele alalım. Bunun için önce, homogen kısmın x_c çözümünü gözönüne alacağız. Burada, $\Delta<0$ halini incelediğimize göre bu çözüm,

$x_c = ce^{-(R/2m)t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$ dır.

Homogen olmayan kısmın x_p çözümü ise, önceden bildiğimize göre,

$$x_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t \qquad (15)$$

dır. Burada A ve B reel sayılardır. Bu sayılar, belirsiz katsayılar yöntemine göre, x_p ve türevlerinin Denk. 14 'de yerlerine konması suretiyle aşağıdaki şekilde bulunur. Bunun için önce x_p 'nin zamana göre birinci ve ikinci türevlerini alt alta yazalım.

$$x_p' = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$$

$$x_p'' = -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t$$

Şimdi, yukarıda belirtildiği gibi, x_p ve türevleri Denk. 14 'de yerlerine konursa,

$$-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t - A\omega \frac{R}{m} \sin \omega t + B\omega \frac{R}{m} \cos \omega t$$

$$+ \omega_0^2 A \cos \omega t + \omega_0^2 B \sin \omega t = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

olur. Eşitliğin sağında ve solunda *sin ωt* ve *cos ωt* fonksiyonlarının katsayıları birbirine eşit yazılırsa,

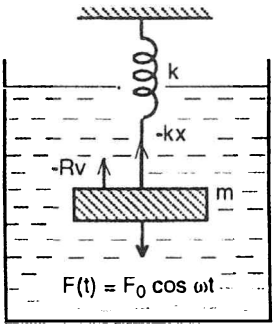
$$A(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{B\,\omega R}{m} = \frac{F_0}{m}$$

$$-\frac{A\,\omega R}{m} + B(\omega_0^2 - \omega^2) = 0$$

bulunur. Bu iki denklemden,

$$A = \frac{F_0 m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\omega^2 R^2 + m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}$$

$$A = \frac{F_0\,\omega R}{\omega^2 R^2 + m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}$$



Şekil 5

elde edilir. Diğer taraftan, Denk. 15 'e özdeş olan bir denklem,

$$x_p = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \theta) \qquad (16)$$

dır. Bunun doğru olduğunu anlamak için,

$$\sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \theta) = \sqrt{A^2 + B^2}\,(\cos\omega t\cos\theta + \sin\omega t\sin\theta)$$

yazılır. Burada,

$$A = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\theta \qquad \text{ve} \qquad B = \sqrt{A^2 + B^2}\sin\theta$$

olduğundan, (15) ve (16) denklemlerinin biribiriyle özdeş olduğu açıkça görülür. Öyle ise, yukarıda bulunan *A* ve *B* değerleri, Denk. 16 'da yerlerine konursa,

$$x_p = \frac{F_0}{\left[m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2 R^2\right]^{1/2}}\cos(\omega t - \theta) \qquad (17)$$

elde edilir. Sonuç olarak, Denk. 14 'ün genel çözümü,

$$x = ce^{-(R/2m)t}\cos(\omega_1 t + \varphi) + \frac{F_0}{\left[m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2 R^2\right]^{1/2}}\cos(\omega t - \theta) \qquad (18)$$

bulunur. Burada,

$$\tan\theta = B/A = \frac{\omega R}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \text{ dır.}$$

Görülüyor ki, genel çözüm iki ayrı terimin toplamından meydana gelmektedir. Birinci terim, önceden tartışmış olduğumuz gibi bir sönümlü titreşim hareketini temsil etmektedir ve kısa zaman sonra bu terimin etkisi ortadan kalkacaktır. İkinci terim ise, peryodu $T = 2\pi / \omega$ olan bir basit harmonik hareketi temsil etmektedir. Birinci terim önemini kaybettikçe bu terim önem kazanır ve sonunda tüm hareket bu terimle kontrol edilir. Bu nedenle birinci terim "geçiş hal" terimi ve ikinci terim "kararlı hal" terimi olarak bilinir.

Yukarıda ifade edildiği üzere, (18) denklemi uyarınca ve belli bir süre sonra cisim, ω açısal hızı ile belirlenen bir basit harmonik hareket yapar. Hareketin genliği ω'nın bir fonksiyonudur. Genlik A ile gösterilirse,

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\left[m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2 R^2\right]^{1/2}}$$

dır. Burada $\omega = 0$ ise $F(t)$ fonksiyonu zamana bağlı değildir ve F sabit değerine eşittir. O zaman amplitüd $F_0/m\omega_0^2 > 0$ olur. Eğer $\omega \to \infty$ ise, açıkça görülüyor ki $A(\omega) = 0$ olur. Öyle ise, $0 < \omega < \infty$ durumunda $A(\omega)$ nasıl bir değer kazanır, şimdi bunu araştıralım.

$A(\omega)$'nın ω ya göre türevi alınır ve "sıfır"a eşitlenirse, buradan

$$2\omega\left[R^2/2m^2 - (\omega_0^2 - \omega^2)\right] = 0$$

elde edilir. Görülüyor ki, ancak

$$\omega = 0 \qquad \text{veya} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - R^2/2m^2}$$

olması durumunda $A(\omega)$'nın değeri "maksimum" olur. Bu nedenle

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_0^2 - R^2/2m^2} \tag{19}$$

değerine, **rezonans frekans** değeri denir. Bu durumda sistem, $F(t)$ ile rezonans durumunda olur.

Aşağıda verilen örnekler ve alıştırmalar, salınım hareketinin daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacaktır.

Örnek 1. Bir basit sarkaç denge konumundan θ_0 açısı kadar ayrılıp serbest bırakılıyor. $\theta_0<5°$ olması durumunda sarkacın denge konumu etrafında bir basit harmonik hareket yaptığını ispatlayınız ve sarkacın peryodunu bulunuz.

Burada m kütlesindeki cisim, L uzunluğunda bir ipin ucuna bağlı olarak A noktasında tavana asıllı bulunmaktadır. Herhangi bir t anında cisim denge konumundan x uzaklığında bulunmaktadır. Şekil 6 'da görüldüğü gibi bu durumda sarkaç denge konumuyla θ açısı yapmakta ve buradan $\omega = d\theta/dt$ açısal hızı ile geçmektedir.

Sarkacın yatay doğrultudaki hareketinin diferansiyel denklemi,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \cos\theta \sin\theta \qquad (20)$$

dır. Burada, $x = L \sin\theta$ dır. Küçük açılar için $\cos\theta \cong 1$ ve $\sin\theta \cong 0$ olduğundan, Denk. 20 yerine,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \qquad (21)$$

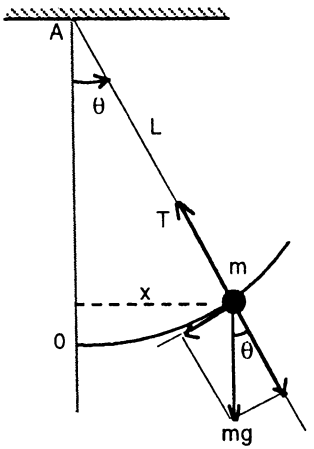
yazılabilir. Burada başlangıç şartları, $\theta(0) = \theta_0$ ve $(d\theta/dt)_{t=0} = 0$ olduğundan, Denk. 21'in genel çözümü,

$$\theta = \theta_0 \cos \sqrt{g/L}\, t \qquad (22)$$

elde edilir. Görülüyor ki, $\theta_0 < 5°$ olması durumunda, basit sarkacın denge konumu etrafındaki hareketi basit harmonik harekettir. Burada, $\omega = \sqrt{g/L}$ olduğundan, hareketin peryodu,

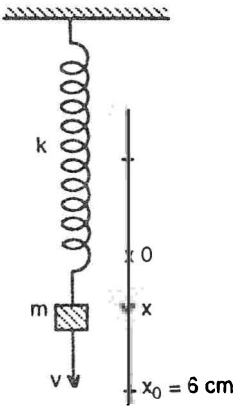
$$T = 2\pi \sqrt{L/g}$$

bulunur.



Şekil 6

Örnek 2. Bir ucundan tavana asılı bulunan bir yayın diğer ucuna m = 2 kg ağırlığında bir cisim asıldığı zaman yay 20 cm uzuyor sonra, denge konumundan x_0 = 6 cm uzaklığına kadar çekilip t = 0 anında oradan ilk hızsız olarak serbest bırakılan cismin herhangi bir t anında 0 dan hangi uzaklıkta bulunduğunu ve hızını bulunuz (Şek. 7).



Şekil 7

Yayın esneklik katsayısı,

$k = F/\Delta x = mg/\Delta x$

$= 2 \text{ kg} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 / 0{,}20 \text{ m} = 98 \text{ N/m}$ bulunur. Cisim 0 noktası etrafında bir salınım hareketi yapmaktadır. Hareketin denklemi,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} + 98x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 49x = 0 \qquad (23)$$

olur. (23) denkleminin genel çözümü,

$$x = c_1 \cos 7t + c_2 \sin 7t \qquad (24)$$

bulunur. t = 0 anında $x = x_0$ olduğundan, $c_1 = x_0$ olur. Denk. 24'ün türevi alınırsa,

$$\frac{dx}{dt} = -7c_1 \sin 7t + 7c_2 \cos 7t$$

$$0 = 7c_2, \qquad c_2 = 0$$

elde edilir. Buna göre, cismin hareket denklemi,

$$x = 6 \cos 7t \qquad (25)$$

olur. Denk. 25 'in türevi alınırsa,

$$\frac{dx}{dt} = v = -42 \sin 7t \qquad (26)$$

elde edilir. Görülüyor ki, cismin hareketi basit harmonik harekettir. Hareketin genliği 6 cm ve açısal hızı 7 rad/sn'dir. Herdefasında cisim denge konumundan, ±42 cm/s-'lik bir hızla geçmektedir.

Örnek 3. Kabul edelim ki, Örnek problem 2 'de, serbest bırakıldığı andan itibaren devamlı olarak cisme, $F = 9.26 \cos \omega t$ kuvveti etki etmektedir. Bundan başka ayrıca sönüm katsayısı $R = 16.25$ *N. s/m* olacak şekilde ve her an cismin hızı ile orantılı bir sönüm kuvveti cisme etki etmektedir. Buna göre, hareketin rezonans frekansını ve rezonans genliğini bulunuz.

Hareketin diferansiyel denklemi,

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 16{,}25\frac{dx}{dt} + 98x = 9{,}26\cos \omega t$$

dir. Bize burada, (27) denkleminin çözümü değil, önce rezonans frekansının değeri sorulmaktadır. Denk. 19 hatırlanacak olursa,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_0^2 - R/2m^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{98/2 - (16{,}25)^2/8}$$

$$\cong \frac{1}{2\pi} \cdot 4 = \frac{2}{\pi}\ sn^{-1}$$

bulunur. Bu durumda, normal harmonik hareketin genliği,

$$A = \frac{F_0}{\left[m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2 R^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{9.26}{\left[4\,(49 - 16)^2 + 16\,(16.25)^2\right]}$$

$$= \frac{9.26}{\left[4356 + 4225\right]^{1/2}}$$

$$\cong 0.1\ m$$

olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Ağırlığı 4 kg olan bir cisim, tavana asılı bulunan ağırlıksız bir yayın diğer ucuna asılmıştır. Bu durumda sistem denge konumuna geldiğinde yayın 10 cm uzadığı görülmüştür. Daha sonra cisim denge konumundan aşağı doğru 8 cm çekilip bırakılıyor. Sistemin harekete başladığı anı zaman başlangıcı olarak kabul ederek, t anında cismin nerede bulunduğunu ve o andaki hızını, hareketin peryodunu ve frekansını bulunuz. Zamana bağlı olarak hareketi bir grafikle gösteriniz.

2. Bir yayın ucuna bağlı olarak yatay ve sürtünmesiz bir düzlem üzerinde hareket etmekte olan bir cisim, $t = 0$ anında denge konumundan $x = -90$ cm uzakta bir noktadan 60 cm/s 'lik bir hızla hareket halindedir. Basit harmonik hareket yapmakta olan cismin hareketinin genliği 120 cm olduğuna göre, cismin denge konumundan hangi hızla geçmekte olduğunu bulunuz.

3. Bir kenarının uzunluğu 20 cm olan küp şeklinde bir tahta blok ($\rho = 0.5$ gm/cm^3) su içinde yüzmektedir. Tahta blok, üst yüzeyi su seviyesi ile aynı olacak şekilde su içine batırılır ve serbest bırakılırsa, cisim düşey doğrultuda nasıl bir hareket yapar? Hareketin diferansiyel denklemini yazınız ve sonra da denklemi çözünüz. Hareketin peryodunu bulunuz.

4. Ağırlığı 1 kg olan bir cisim, esneklik katsayısı 25 N/m olan bir yayın serbest ucuna bağlı olarak tavana asılı durmaktadır. Denge konumu etrafında ve düşey doğrultuda salınım hareketine terk edilen cisim, zaman başlangıcında, denge konumu altında 20 cm uzakta bulunduğu sırada yukarı doğru –30 cm/s 'lik bir hızla hareket halindedir. Cismin hareketine engel olmaya çalışan sürtünme kuvveti, 4 dx/dt'ye eşittir. Cismin nasıl bir hareket yapmakta olduğunu tartışınız ve zamana bağlı olarak hareketin grafiğini çiziniz.

5. Bir ucundan tavana asılı bulunan bir çelik yayın serbest ucuna 2 kg ağırlığında bir cisim asıldığında yay 10 cm uzuyor.
Denge konumu etrafında düşey doğrultuda harekete bırakılan cisim π sn aralıklarla denge konumundan geçmektedir. Cismin hareketine engel olmaya çalışan sürtünme kuvveti cismin hızı ile orantılıdır. Orantılık katsayısı R 'yi bulunuz.

6. Ağırlığı 8 kg olan bir cisim tavana asılı bulunan bir çelik yayın serbest ucuna bağlanmıştır. Cisim denge konumundan itibaren aşağı doğru A metre kadar çekilmiş ve $t = 0$ anında, aşağı doğru 3 m/s 'lik bir ilk hızla harekete bırakılmıştır. Hareketin genliği $\sqrt{10/5}$ m ve peryodu $\pi/2$ s olarak bilindiğine göre, yayın k esneklik katsayısını ve A'nın değerini bulunuz.

7. Bir ucunda tavana asılı bulunan bir yayın diğer ucuna 4 kg ağırlığında bir cisim asılmıştır. Bu cisim denge konumu etrafında peryodu 4 sn olan basit harmonik hareket yaparken durduruluyor ve 4 kg 'lık cisim alınarak yerine m kg ağırlığında başka bir cisim asılıyor. Bu durumda sistemin peryodu 6 sn olduğuna göre m'nin değerini bulunuz.

8. Bir ucundan tavana asılı bulunan yayın diğer ucuna 8 kg ağırlığında bir cisim asıldığında yay 12 cm uzuyor. Denge konumundan aşağı doğru 6 cm uzaklığa çekilen cisim, t = 0 anında ilk hızsız olarak serbest bırakılıyor. Sürtünme kuvveti 10 dx/dt olduğuna göre hareketi inceleyiniz ve zamana bağlı olarak cismin yerini ve hızını bulunuz.

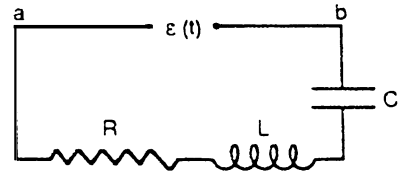
9. Bir yayın ucuna bağlı olan 1 kg ağırlığında bir cisim, $F(t) = F_0 \cos \omega t$ kuvvetinin de etkisi altında salınım hareketi yapmaktadır. Sürtünme kuvveti hız ile orantılıdır ve $R = \sqrt{2}$ N. s/m ve yayın esneklik katsayısı $\omega = 8$ N/m'dir. $\omega = 5$ rad/s ve $\omega = \sqrt{7}$ rad/s olması durumlarında hareketin genliğini hesaplayınız.

10. Zaman başlangıcında, bir yayın ucuna asılı bulunan 2 kg ağırlığında bir cisim denge konumunda hareketsiz durmaktadır. Yayın esneklik katsayısı k = 18 N/m olarak biliniyor. t = 0 anından itibaren düşey doğrultuda cisme $F_0 = 12$ N'luk bir kuvvet devamlı olarak etki ediyor. Cismin hareketini inceleyiniz.

11. Bir ucundan tavana asılı bulunan bir çelik yayın diğer ucuna 5 kg ağırlığında bir cisim asıldığında yay 1 cm uzuyor. Ayrıca sürtünme kuvvetinin değerinin hızla orantılı olduğu biliniyor ve cisim 2 cm/s 'lik bir hızla hareket ederken cisme etki eden sürtünme kuvveti 2 N olarak veriliyor. t = 0 anında cisim denge konumundan 6 cm uzaklıkta serbest bırakılıyor. Hareketin diferansiyel denklemini yazınız.

5-2 ELEKTRİK-DEVRE PROBLEMLERİ

İkinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlere örnek olarak ikinci ve önemli bir uygulama elektrik-devre problemleridir. Burada gözönüne alınan elektrik-devre, Şekil 8 'de görüldüğü gibi, kutuplar arasındaki elektriksel potansiyel farkı zamanla değişen bir üretecin uçları arasına seri olarak bağlanmış bulunan bir direnç, bir bobin ve bir kondansatör'den oluşan bir kapalı devredir. $\varepsilon(t)$ 'nin değeri "volt" cinsinden, R 'nin değeri "ohm", L 'nin değeri "henry" ve C 'nin değeri ise "farad" cinsinden ölçülmektedir. R, L ve C verilen sabit değerlerdir. $\varepsilon(t)$ genel olarak bir sinüsoidal fonksiyonla, örneğin $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$ fonksiyonu ile ifade edilir. Burada ε, gerilimin "volt" cinsinden maksimum değeridir.



Şekil 8

Şekil 8 'de görülen RLC devresinden geçen akım, zamana bağlı olarak değişmektedir. Aynı şekilde kondansatörde toplanan elektrik yük miktarı da zamana bağlı olarak değişmektedir. Burada amacımız, elektrik akım şiddetinin $I(t)$ ile gösterilen ani değerini ve aynı şekilde, t anında kondansatörde bulunan elektrik yükü miktarı $Q(t)$ 'yi bulmaktır.

Devreden geçen akımın ani değeri $I(t)$, ikinci Kirchhoff kanunundan hareket edilerek bulunabilir. Buna göre, a ve b noktaları arasına tatbik edilen ani potansiyel farkı $\varepsilon(t)$, devrenin diğer kısımlarında meydana gelen ani potansiyel düşmeleri toplamına eşittir. Herhangi bir anda devreden geçen akımın ani şiddeti I ile ifade edilirse, o anda R direncinin uçları arasındaki potansiyel düşmesi IR, bobinin uçları arasındaki potansiyel düşmesi $L\, dI/dt$ ve kondansatörün uçları arasındaki potansiyel düşmesi Q/C olarak bilinmektedir. Bu durumda, Kirchhoff kanununa göre,

$$L\frac{dI}{dt} + rI + \frac{Q}{C} = \varepsilon(t) \tag{28}$$

yazılır. Burada Q, gözönüne alınan zamanda kondansatördeki yük miktarıdır. Bir dt zamanı sonra bu yük miktarı dQ kadar artacağından veya azalacağından ve bu sonsuz küçük zaman aralığında devreden geçen akım şiddeti sabit kabul edileceğinden, tarif olarak,

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} \tag{29}$$

olur. Denk. 29 'un türevi alınırsa,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} \tag{30}$$

elde edilir. I ve dI/dt'nin değerleri Denk. 28'de yerlerine konursa,

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon(t) \tag{31}$$

elde edilir. Görülüyor ki, (31) denklemi, ikinci mertebeden, sabit katsayılı ve homogen olmayan lineer bir diferansiyel denklemdir. Başlangıç şartları da gözönüne alınarak bu denklem kolayca çözülür ve zamana bağlı olarak kondansatörün yükü bulunur.

Bu defa, Denk. 28 'de her terimin ayrı ayrı zamana göre türevi alınırsa,

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d\varepsilon}{dt} \tag{32}$$

elde edilir. Bu denklem de aynı şekilde, ikinci mertebeden sabit katsayılı ve homogen olmayan bir lineer diferansiyel denklemdir. Başlangıç şartları kullanılarak denklem çözülür ve $I(t)$ ani değeri kolayca bulunur.

Şimdi kabul edelim ki, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$ olsun.

O zaman (31) denklemi

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon_0 \cos \omega t \tag{33}$$

olur. Burada homogen kısmın özel çözümü $Q_p(t)$ ile gösterilirse, önceden biliyoruz ki,

$$Q_p(t) = A\cos \omega t + B \sin \omega t$$

olur. Belirsiz katsayılar metodu kullanılarak A ve B bulunur. Bunun için Q ve türevleri Denk. 33 'de yerlerine konursa,

$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)A + \omega R B = \varepsilon_0$$

$$-\omega R A + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)B = 0$$

elde edilir. Buradan A ve B bulunur ve Denk. 34 'de yerlerine konursa,

$$Q_p(t) = \frac{\varepsilon_0\left(1/C - L\omega^2\right)\cos \omega t + \omega R \varepsilon_0 \sin \omega t}{\left(1/C - L\omega^2\right)^2 + \omega^2 R^2} \tag{35}$$

elde edilir. Denk. 35, daha kısa olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$Q_p(t) = \frac{\varepsilon_0 \sin(\omega t + \delta)}{\sqrt{\left(1/C - L\omega^2\right)^2 + \omega^2 R^2}}$$

$$Q_p(t) = \frac{\varepsilon_0 \sin(\omega t + \delta)}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/C\omega\right)^2}} \qquad (36)$$

olur. Burada δ'ya "faz açısı" denir ve tarif olarak,

$$\tan \delta = \frac{1/C - L\omega^2}{\omega R} = \frac{1/C\omega - \omega L}{R}$$

olduğundan, δ buradan bulunur ve Denk. 36 'da yerine konur. Denk. 33 'ün genel çözümü,

$$Q(t) = Q_c(t) + Q_p(t)$$

olduğundan ve $t \to \infty$ için $Q_c(t) = 0$ olduğundan,

$Q_p(t)$'ye $Q(t)$ gözüyle bakabiliriz.

Akım şiddetinin ani değerine gelince, $I(t) = dQ/dt$ olduğundan, Denk. 36 'nın türevi alınırsa,

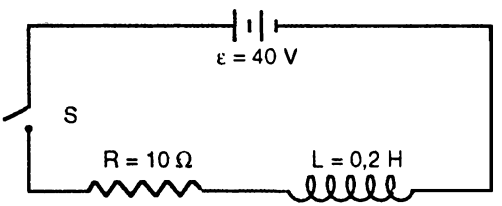
$$I(t) = \frac{\varepsilon_0 \cos(\omega t + \delta)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}} \qquad (37)$$

elde edilir. Görülüyor ki, ani akım şiddetinin frekansı, *a* ve *b* uçları arasına uygulanan ani gerilimin frekansına eşittir. (37) denkleminin paydasında görülen $\omega L - 1/\omega c$ ifadesine devrenin reaktans 'ı denir. Tüm payda,

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2} = Z$$

ifadesi ise, devrenin impedans'ı adını alır.

Örnek 1. Direnci R = 10 ohm olan bir direnç teli ve öz indüksiyon katsayısı $L = 0{,}2$ henry olan bir bobin, elektromotor kuvveti 40 volt olan bir doğru akım üretecine, Şekil 9'da görüldüğü gibi seri olarak bağlanıyor. $t = 0$ anında S anahtarı kapandığında, devreden geçen akım şiddeti "sıfır" değerinden başlayarak gittikçe artan bir değer alır ve en sonunda sabit bir değere ulaşır. İşte bu kısa zaman aralığı içinde bir t anında devreden geçen akım şiddetini bulunuz.



Şekil 9

E, R ve L'nin verilen değerleri Denk. 32 'de yerlerine konursa,

$$0{,}2\frac{d^2I}{dt^2} + 10\frac{dI}{dt} = 0$$

elde edilir. Bu denklemin genel çözümü,

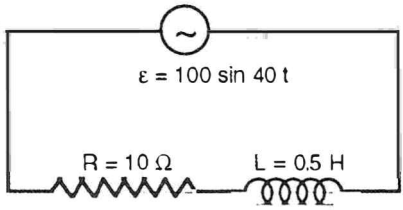
$$I(t) = c_1 + c_2e^{-50t}$$

olur. $t = 0$ için $I(0) = 0$ ve $t \to \infty$ için $I = 40/10 = 4$ amp olduğundan

$$I(t) = 4\,(1-e^{-50t})$$

bulunur.

Örnek 2. Elektromotor kuvveti $\varepsilon = 100 \sin 40t$ olan bir üretecin uçları arasına *10 ohm*'luk bir direnç teli ile *0,5 H*'lik bir bobin seri olarak bağlanıyor. $t = 0$ anında devreden geçen akım şiddeti "sıfır" ise herhangi bir t anında akım şiddeti ne olur? Şek. 10 'a bakınız.



Şekil 10

Denk. 28 'de bilinen değerler yerlerine konursa $0{,}5\frac{dI}{dt} + 10\,I = 100 \sin 40t$ elde edilir. Denklem sadeleştirilirse,

$$\frac{dI}{dt} + 20\,I = 200 \sin 40t$$

olur. Denklemin genel çözümü,

$$I(t) = 2\,(\sin 40t - 2\cos 40t) + ce^{-20t}$$

dır. Başlangıç şartı kullanılarak $c = 4$ bulunur. Bu değer yukarıda yerine konursa,

$$I(t) = 2\,(\sin 40t - 2\cos 40t) + 4e^{-20t}$$

bulunur. Burada belli bir zaman sonra ikinci terim "sıfır" olacağından *I(t)* değeri,

$$I(t) = \frac{100 \sin (40t + \delta)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

olur. Bilinen değerler yerlerine konursa,

$$I(t) = 2\sqrt{5} \sin (40t + \delta) \qquad (39)$$

elde edilir. $t \to \infty$ için, (38) ve (39) denklemleri biribiriyle özdeştir.

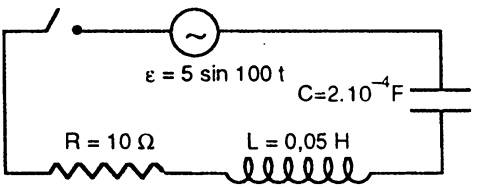
$$\tan\delta = \frac{-L\omega^2}{\omega R} = -\frac{L\omega}{R} = -2$$

olduğundan, $\delta = -1{,}11$ *rad.* olur. Bu değer, Denk. 39 'da yerine konursa,

$$I(t) = 2\sqrt{5} \sin (40t - 1{,}11)$$

bulunur.

Örnek 3. Şekil 11'de görülen kapalı devre, bir *RLC* devresidir. Zaman başlangıcında devreden geçen akım şiddeti "sıfır" olduğuna göre herhangi bir t anında *I (t)* ne olur?



Şekil 11

Denk. 37 burada tekrar yazılırsa,

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0 \sin (\omega t + \delta)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}}$$

olur. Bilinen değerler burada yerine konursa,

$$I(t) = \frac{5 \sin (100t + \delta)}{\sqrt{100 + (5 - 50)^2}} \cong \frac{1}{9} \sin (100t + \delta)$$

ve

$$\tan\delta = \frac{1/\omega C - L\omega}{R} = \frac{50 - 5}{10}$$

$\tan \delta = 4{,}5$ ve buradan $\delta = 1{,}35$ rad

olduğundan,

$$I(t) \cong \frac{1}{9} \sin (100t + 1{,}35)$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir alternatif akım devresinde R = 0 ise ve bir bobinle bir kondansatör seri olarak bağlanmışsa, $\omega = \sqrt{1/LC}$ için devre rezonans durumundadır. Bunu ispatlayınız.

2. Bir RLC devresinde, elektromotor kuvvet $\varepsilon(x) = 110 \cos 120\pi t$, L = 10 H ve $R = 3 \times 10^{3}\ \Omega$ ve $C = 0{,}25 \times 10^{-5}$ F veriliyor.
Belli bir zaman sonra devreden geçen akım şiddetinin ani değerini bulunuz.

3. Bir RLC devresinde, elektromotor kuvveti $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$ olan bir alternatif akım üreteci, direnci R ohm olan bir direnç teli indüksiyon katsayısı L henry olan bir bobin ve sigası C farad olan bir kondansötör seri olarak bağlanıyor. Devreden geçen akım şiddetinin ani değerini,

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{Z}\left(\frac{R}{Z}\sin \omega t - \frac{X}{Z}\cos \omega t\right) \qquad (40)$$

olduğunu ispatlayınız. Burada, $X = \omega L - 1/\omega C$

ve $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}$ dir. Ayrıca,

(40) denklemi ile ifade edilen I(t) değerinin,

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0 \sin(\omega t - \phi)}{Z}$$

şeklinde ifade edildiğini gösteriniz. Burada,

$$\sin \phi = \frac{X}{Z} \qquad \text{ve} \qquad \cos \phi = \frac{R}{Z}$$

dir.

4. Kapalı bir devrede, elektromotor kuvveti $\varepsilon(t) = 400\, e^{-100t}$ olan bir üreteç, $R = 40\ \Omega$ olan bir direnç teli, L = 0,2 H olan bir bobin ve $C = 4 \times 10^{-6}$ F olan bir kondansatör seri olarak bağlıdır. Belli bir zaman sonra devreden geçen akım şiddetinin ani değerini bulunuz.

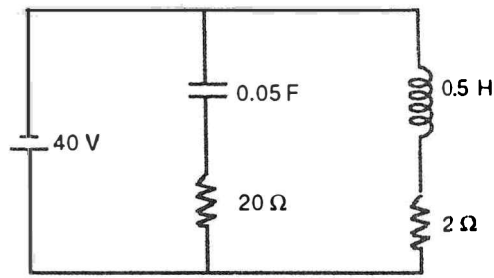
5. Bir LRC devresinde, L = 10 H, $R = 100\ \Omega$, C = 0,002 F ve E = 1 V (sabit) veriliyor. Eğer, t = 0 için I = 0 ve q = 0 ise, (a) zamana bağlı olarak I(t) ve q(t) fonksiyonlarını ve (b) t>0 için I ve q 'nun maksimum değerlerini bulunuz.

6. Bir LRC devresinde, L = 1 H, R = 200 Ω, C = $2x10^{-4}$ F ve $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos 100\,t$ olarak veriliyor. t = 0 anında kondansatörün yükü sıfır ve devreden geçen akım şiddeti sıfır 'dır. (a) Bir t anında akım şiddetini ve kondansatörün yükünü bulunuz. (b) Devreden geçen maksimum akım şiddetini ve kondansatörün maksimum yükünü bulunuz.

7. Bir LRC devresinde alternatif gerilim $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$ şeklinde verilmiştir. (a) Kondansatörün yükünü zamana bağlı olarak veren diferansiyel denklemi yazınız. $Q = Q_0 \sin(\omega t + \phi)$ 'nin diferansiyel denklemi sağladığını gösteriniz. (b) Q_0 ve ϕ 'nin değerlerini, E_0, L, R, C ve ω cinsinden bulunuz.

8. Bir alternatif akım devresinde R = 10 Ω, C = 10^{-3} F ve L = 0,4 H seri olarak ε_0 = 100 V ve f = 50 Hz olan alternatif akım devresinin uçları arasına bağlanmıştır. Başlangıç anında kondansatörün yükü ve devreden geçen akım şiddeti sıfırdır. Herhangi bir t anında akım şiddetini veren I (t) fonksiyonunu bulunuz.

9. Aşağıdaki Şek. 12 'de verilen elektrik devresini gözönüne alınız. t = 0 anında kondansatörün yükü 1 coulomb ve bobinden geçen akım şiddeti sıfırdır. Herhangi bir t anında kondansatörün yükünü ve devrenin kollarından geçen akım şiddetlerini zamana bağlı olarak bulunuz.



Şekil 12

10. Problem 9'da $\varepsilon(t) = 100 \sin 2t$ olarak problemi yeniden çözünüz.

11. Bir RLC devresinde, üretecin elektromotor kumvveti $\varepsilon_0 \cos \omega t$ ile ifade edilmektedir. Bu reel fonksiyon, $\varepsilon_0 e^{j\omega t}$ (ki burada $j = \sqrt{-1}$ dir.) fonksiyonun reel kısmıdır. Zamana bağlı olarak kondansatördeki yük miktarını ifade eden,

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

diferansiyel denklemini gözönüne alarak, önce bu reel denklemi aşağıdaki şekilde kompleks formda yazınız.

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon_0 e^{j\omega t}$$

Bu denklemin kompleks çözümünün,

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_0}{j\omega R - \omega^2 L + 1/C} e^{j\omega t}$$

olduğunu ispatlayınız. Burada Q(t) 'nin reel kısmını bulunuz ve başka yöntemle önceden bulunmuş olan değerle karşılaştırınız (Yol gösterme: $Q(t) = Ae^{j\omega t}$ alınız).

5-3 MEKANİK - MUKAVEMET PROBLEMLERİ

Yüksek mertebeden sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemlere dinamik, yapı ve elastik kiriş gibi mühendislik problemlerinde sık sık karşılaşılır. Newton 'un ikinci hareket kanunu, herşeyden önce ikinci mertebeden bir doğrusal diferansiyel denklem olduğundan dinamik problemlerinde bu yasa esas alınır. Problemle birlikte verilen başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak çözüm fonksiyonu elde edilir.

Mukavemet problemlerinde düşey yükle yüklenmiş bir kirişin yer değiştirmesinin (elâstik eğri) denklemi yine ikinci mertebeden bir doğrusal diferansiyel denklem olarak elde edilir:

Analitik geometride, düzlemsel bir eğrinin dik eksen sisteminde eğrilik ifadesi

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

olarak verilir. Burada ρ eğrilik yarıçapı, x ve y kiriş üzerindeki bir noktanın koordinatları ve y ayni zamanda noktanın başlangıç konumundan itibaren yükleme altında yer değiştirmesidir. Elâstik eğrinin ρ eğrilik yarıçapı, M eğilme momenti ve I atalet momenti arasındaki bağıntı, E elâstisite modulü olmak üzere

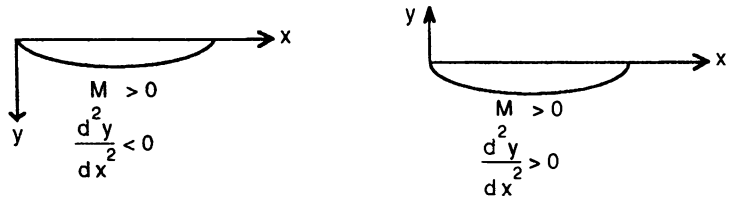
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

dır. Eğrilik ifadesi bu bağıntıda yerine konursa elâstik eğrinin diferansiyel denklemi tam olarak elde edilir. Ancak mühendislik uygulamalarında şekil değiştirme küçük

olacağından $\frac{dy}{dx}$ eğimi de küçüktür ve eğimin karesi eğrilik ifadesinde birim yanında ihmal edilirse

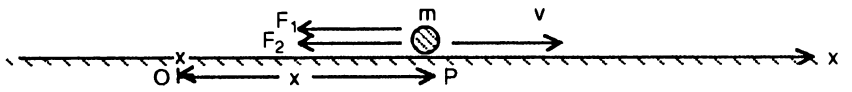
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{M}{EI} \tag{41}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Denklemdeki iki farklı işaretten birisine karar vermek seçilen eksen sisteminin yönlenmesine ve eğilme momenti için kabul edilen işaret prensibine bağlıdır. Şekil 13 (a) ve (b)'de bu durum belirtilmiştir.



(a) **Şekil 13** (b)

Örnek 1. Kütlesi m olan bir P maddesel noktası, $t = 0$ başlangıç anında $x = 0$ noktasından v_0 ilk hızı ile geçecek şekilde x ekseni doğrultusunda hareket halindedir (Şekil 14). Ancak hareket sırasında daima O noktasına yönlenmiş bir $F_1 = mn^2x$ geri çağırma kuvveti ile $F_2 = 2\lambda mnv$ harekete karşı direnç kuvveti cisme etki etmektedir. Burada $0 < \lambda < 1$ ve n sabitlerdir ve v cismin herhangi bir andaki hızıdır. Maddesel noktanın x yerdeğiştirmesini zamana bağlı olarak bulunuz.



Şekil 14

Cisim, O'dan itibaren x uzaklığında bir v hızı ile pozitif x ekseni yönünde hareket etmekte iken, cisme negatif x ekseni yönünde $F_1 = mn^2x$ ve $F_2 = 2\lambda mnv$ kuvvetleri etki etmektedir. Newton'un ikinci hareket kanununa göre;

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mn^2x - 2\lambda mn\frac{dx}{dt}$$

ve buradan

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda n\frac{dx}{dt} + n^2x = 0 \tag{42}$$

elde edilir. Bu bir ikinci mertebeden sabit katsayılı homogen diferansiyel denklemdir. Karakteristik denklem ve kökleri

$$t^2 + 2\lambda\, nt + n^2 = 0$$

$$t_{1,2} = -\lambda\, n \pm \sqrt{\lambda^2 n^2 - n^2}$$

$$t_1 = -\lambda\, n + n\sqrt{\lambda^2 - 1}\,, \quad t_2 = -\lambda n - n\sqrt{\lambda^2 - 1}$$

olur. $0 > \lambda > 1$ verildiği için $\lambda^2 - 1 < 0$ dır. O halde diferansiyel denklemin genel çözümü

$$x(t) = e^{-\lambda nt}\left(c_1 \cos\sqrt{1-\lambda^2}\, nt + c_2 \sin\sqrt{1-\lambda^2}\, nt\right)$$

Başlangıç koşulları kullanılarak c_1 ve c_2 sabitleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{dx}{dt} = -n\lambda e^{-n\lambda t}\left[c_1 \cos\sqrt{1-\lambda^2}\, nt + c_2 \sin\sqrt{1-\lambda^2}\, nt\right]$$

$$+ e^{-n\lambda t}\left[-c_1 n\sqrt{1-\lambda^2}\sin\sqrt{1-\lambda^2}\, nt + c_2 n\sqrt{1-\lambda^2}\cos\sqrt{1-\lambda^2}\, nt\right]$$

$t = 0$ için $x(0) = 0$ ve $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_0$ olduğundan

$$c_1 = 0 \text{ ve } c_2 = v_0/n\sqrt{1-\lambda^2}$$

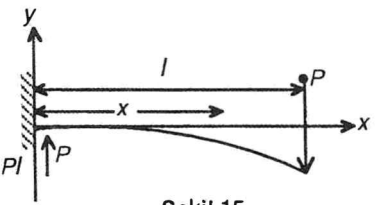
elde edilir. Bu durumda istenilen çözüm

$$x(t) = \frac{v_0 e^{-n\lambda t}}{n\sqrt{1-\lambda^2}} \sin n\sqrt{1-\lambda^2}\, t \qquad (43)$$

bulunur.

Örnek 2. Şekil 15'de görüldüğü gibi tek bir P kuvveti etkisinde olan, l uzunluğundaki ankastre kirişte yer değiştirmeleri bulunuz.

Mesnetteki tepkiler P düşey tepki ve Pl momentidir. Mesnetten herhangi bir x uzaklığında yukarı etkiyen P kuvveti pozitif Px momentini doğurur.



Şekil 15

Bu halde x kesitindeki toplam eğilme momenti

$$M = -Pl + Px$$

olur ve elastik çubuğun diferansiyel denklemi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-Pl + Px}{EI} \tag{44}$$

şeklinde elde edilir. Mesnette

$$x = 0 \quad \text{için} \quad y = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dx}$$

Sınır koşulları altında diferansiyel denklemin çözümü ard arda iki kere integral alınarak basitçe yapılırsa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}\left[-lx + \frac{x}{2}\right] + C_1$$

$$y = \frac{1}{EI}\left[-l + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right] + C_1x + C_2$$

Verilen koşullar kullanılarak integral sabitleri

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0$$

bulunur. Bu durumda kirişin herhangi bir noktasındaki y yerdeğiştirmeleri

$$y = \frac{-Pl}{EI}\frac{x^2}{2} + \frac{Px^3}{6EI} \tag{45}$$

şeklinde elde edilir. $X = l$ için çubuk ucunda maksimum yer değiştirme ise

$$y_{max} = -\frac{Pl^3}{3} \tag{46}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. l boyunda, g yoğunluklu, gerilmiş elastik bir ip x ekseni boyunca denge konumundan itibaren ω açısal hızı ile dönmektedir. T ipteki gerilme kuvveti, $y(x)$ ise x dönme ekseninden itibaren ipin yer değiştirmesi olduğuna göre dönme hareketinin diferansiyel denklemi

$$T\frac{d^2y}{dx^2} + \rho\omega^2 y = 0 \tag{47}$$

dır. Hareketi inceleyiniz.

İp iki ucundan tesbit edilmiş olduğundan, sınır koşulları

$$y(0) = 0, \qquad y(l) = 0 \tag{48}$$

ile verilir. (47) diferansiyel denklemindeki sabitleri

$$\lambda = \frac{\rho\omega^2}{T}$$

ile tanımlarsak denklem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

şeklini alır ve çözümü

$$y = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

olur. (48) sınır koşulları uygulanırsa

$x = 0$ için, $A = 0$ ve çözüm

$$y = B\sin\sqrt{\lambda}\,x \qquad (49)$$

olur. $x = 1$ için, $B\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$, $B \neq 0$, $\sqrt{\lambda}\,l = n\pi$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ öz değerleri için problemin sıfırdan farklı çözümü vardır ve her bir λ için (49) 'un çözümü,

$$y = B\,\phi_n(x) \qquad (50)$$

olur. Burada $\phi_n(x) \sin \frac{n\pi}{l}x$ problemin öz fonksiyonlarıdır; Öz fonksiyonların herhangi bir katı da problemin çözümüdür.

Her bir λ_n değerine ω açısal hızın bir değeri karşı geleceğinden,

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{l}}, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (51)$$

bulunur. Bu değerler, dönen ipin kritik açısal hızlarıdır.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir maddesel nokta sabit bir O noktasından geçen doğru üzerinde hareket etmektedir. x, t zamanına bağlı olarak noktanın yer değiştirmesi olmak üzere hareketin diferansiyel denklemi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + n^2x = \cos nt$$

ile veriliyor. n > k için x (t) uzaklığını

$$x(0) = \frac{1}{2k^2}, \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

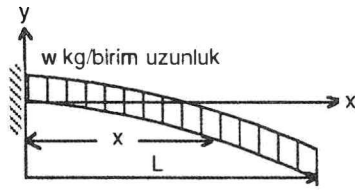
başlangıç koşulları altında hesaplayınız.

2. Örnek 2'de gösterilen ankastre kirişin uzunluğu 300 cm ve etkiyen yük 500 kg.dır. Tarafsız eksene göre atalet momenti 1450 cm^4'dir. En büyük yerdeğiştirmeyi bulunuz. E = 2,1 x 10^6 kg/cm^2.

3. Şekilde görüldüğü gibi ω kg/m şiddetinde düzgün yayılı bir yükle yüklenmiş ankastre kirişin herhangi bir x kesitindeki eğilme momenti

$$M = -\frac{\omega}{2}(L - x)^2$$

olduğuna göre yerdeğiştirme ifadesini bulunuz.



Şekil 16

4. Eksenel P yükü etkisinde olan bir kolonun (çubuk) şekil değiştirmesinin diferansiyel denklemi de (41) şeklindedir. Çubuğun herhangi bir noktasındaki eğilme momenti M = – Py olur. Kritik yük çubuğu eğri formunda tutabilecek kuvvet olarak tanımlanmıştır. Bu halde iki ucu mafsallı L uzunluğundaki elâstik bir çubuğun kritik yükünü bulunuz.

BÖLÜM 6

Lineer Diferansiyel Denklemlerin Kuvvet Serileri Cinsinden Çözümü

6-1 GİRİŞ

Şimdiye kadar tam olarak çözümlenebilen diferansiyel denklemlerle ilgilendik. Homogen olan veya olmayan sabit katsayılı herhangi mertebeden diferansiyel denklemlerin, bazı bilinen elementer fonksiyonların lineer kombinasyonları olarak çözülebildiklerini gördük. Diğer taraftan, matematikte, mühendislik bilimlerinde, fiziksel bilimlerde ve daha birçok bilim dalında rastlanan ve genellikle uygulamada çok rastlanan ikinci mertebeden lineer değişken katsayılı bazı diferansiyel denklemler vardır ki, bunlar elementer fonksiyonlar cinsinden çözülemezler. Bazen uygun bir değişken değiştirme yaparak, değişken katsayılı bir diferansiyel denklemden sabit katsayılı bir denklem elde etmek ve böylece denklemi çözmek mümkün ise de genellikle bu yöntemle çözüm aramak kolay değildir. Bu nedenle, değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin çözümü için yeni yöntemlere gereksinim vardır.

Yukarıda değindiğimiz değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan en güçlü metodlardan birisi, doğrudan denklemin çözümünü veren fonksiyonları değil, fakat bazı şartlar altında ancak bu fonksiyonların kuvvet serilerine açılımını veren ve **lineer diferansiyel denklemlerin kuvvet serileri cinsinden çözümü metodu** adını alan bir metod 'dur. Burada amacımız bu metodu incelemek ve uygulamalarını görmektir.

Örnek olarak önce,

$$d^2y/dx^2 + 4y = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümünü gözönüne alalım. Bilindiği gibi, bu denklemin genel çözümü,

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \tag{1}$$

dır. Burada verilen *cos 2x* ve *sin 2x* fonksiyonlarının kuvvet serisine açılımlarını yazacak olursak, (1) denklemi,

$$y = c_1\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots\right) + c_2\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \ldots\right) \tag{2}$$

şeklini alır. Görülüyor ki, (1) ve (2) fonksiyonlarının her ikisi de verilen diferansiyel denklemin çözümüdür. Öyle ise, diferansiyel denklemin çözümünü (1) veya (2) ifadesi şeklinde vermek hiç farketmeyecektir.

İkinci olarak,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \tag{3}$$

diferansiyel denkleminin çözümünü gözönüne alalım. Uygun bir değişken değiştirme ile bu denklem, sabit katsayılı bir denklem haline dönüşebilir. Genel olarak nasıl bir değişken değiştirme yapılması gerektiğini önceden bilmek kolay olmamakla beraber burada $y = u.\, x^{-1/2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1/2}\frac{du}{dx} - \frac{1}{2}x^{-3/2}u$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-1/2}\frac{d^2u}{dx^2} - x^{-3/2}\frac{du}{dx} + \frac{3}{4}x^{-5/2}u$$

olur. Bu değerler (3) denkleminde yerlerine konursa,

$$x^2\left(x^{-1/2}u'' - x^{-3/2}u' + \frac{3}{4}x^{-5/2}u\right) + x\left(x^{-1/2}u' - \frac{1}{2}x^{-3/2}u\right)$$

$$+ \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)x^{-1/2}u = 0$$

veya

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0 \tag{4}$$

elde edilir. (4) denkleminin çözümü ise,

$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ dır.

u yerine değeri konursa, (3) denkleminin genel çözümü,

$$y = x^{-1/2}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

bulunur. Burada, cos x ve sin x yerine kuvvet serileri cinsinden açılımları yazılırsa,

$$y = c_1 x^{-1/2}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + c_2 x^{-1/2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) \qquad (5)$$

elde edilir. Denk. 5, değişken katsayılı ikinci mertebeden lineer bir denklem olan (3) diferansiyel denkleminin, kuvvet serileri cinsinden genel çözümüdür. Burada c_1 ve c_2 herhangi iki sabit sayıdır.

Bu örnekler bize, değişken katsayılı bir lineer diferansiyel denklemin kuvvet serileri cinsinden çözülebileceğini göstermekte ve bu konuda bir ipucu vermektedir.

6-2 KUVVET SERİLERİNİN YAKINSAKLIĞI, YAKINSAKLIK YARIÇAPI

Bu bölümde amacımız, değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin kuvvet serileri cinsinden çözümlerini bulmaktır. Bu nedenle, kuvvet serileri ile ilgili olarak, "yakınsaklık", "ıraksaklık" ve "yakınsaklık yarıçapı" gibi kavramları burada öncelikle ve aşağıda verildiği şekilde özet olarak sunmakta yarar vardır.

(a) Önce,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad a_0 \neq 0 \qquad (6)$$

kuvvet serisini gözönüne alalım. Herhangi bir $x = x_1$ reel değeri için, eğer

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$$

reel sayılar toplamı, belli bir sayıya yaklaşıyorsa, o zaman yukarıda verilen (6) numaralı kuvvet serisine $x = x_1$ noktasında **yakınsak** denir. Eğer bu toplam belli bir sayıya yaklaşmıyorsa, o zaman seriye, $x = x_1$ noktasında **ıraksak** denir.

a_0 sayısının, serinin sıfır 'dan farklı bir sabit terimi olduğu gözönüne alınırsa, bütün kuvvet serilerinin $x = 0$ noktasında yakınsak olduğu açıkça görülür. Aynı şekilde, eğer kuvvet serisi,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

şeklinde verilmişse, burada $x = x_0$ noktasında seri yakınsak olur.

Bir serinin yakınsaklığı genel olarak "limit " kavramı kullanılarak aşağıdaki şekilde tarif edilir:

Eğer, x 'ın herhangi bir değeri için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

belli bir değere yaklaşıyorsa, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ serisine x noktasında **"yakınsak"** denir.

(b) Genellikle, her kuvvet serisinin bir R "Yakınsaklık yarıçapı" vardır. Burada yakınsaklık yarıçapı $0 \le R \le \infty$ şeklinde tarif edilen bir sayıdır ve $|x| < R$ olduğu zaman seri yakınsak ve $|x| > R$ olduğu zaman seri ıraksak olur. Başka bir deyişle,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

kuvvet serisi, 0 merkezli R yarıçaplı bir aralık içindeki tüm x değerleri için yakınsak, bu aralığın dışındaki x değerleri için ıraksak'tır. Aralığın sınır noktalarında, serinin yakınsak veya ıraksak olduğu her seri için ayrıca belirlenir.

(c) Eğer, $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n(x - x_0)^n \right|$ serisi yakınsak ise, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ serisine x noktasında **mutlak yakınsak** denir. Kolayca ispatlanabilir ki, mutlak yakınsak olan bir seri yakınsaktır.

(d) Bir kuvvet serisinin mutlak yakınsaklığını belirlemek için en iyi metod, "Oranti Testi"dir. Eğer, x 'in herhangi bir değeri için, örneğin $x = x_1$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x_1^{n+1}}{a_n x_1^n} \right| = |x_1| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \qquad (7)$$

ise ve burada $L < 1$ ise seri yakınsak ve $L > 1$ ise seri ıraksaktır. $L = 1$ için ise bir-şey söylenemez.

Bir kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$$

olarak tarif edildiğinden, yukarıda belirtildiği gibi, $|x| < R$ eşitsizliğini sağlayan x değerleri için kuvvet serisi yakınsaktır.

Yukarıda örnek olarak ele aldığımız (3) denkleminin çözümü olan (5) fonksiyonu gösteriyor ki, değişken katsayılı ikinci mertebe lineer bir diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

şeklinde verilir. Burada $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ herhangi iki kuvvet serisidir. Diğer taraftan, her zaman ve x'in her değeri için bu genel çözüm geçerli olmayabilir. O zaman genel çözümün geçerli olduğu, kullanılır olduğu aralığın belirlenmesi gerekmektedir. İşte bu nedenle, genel çözümde, verilen serilerin herbiri için yakınsaklık aralığının bulunması zorunludur. Bu durumda, her iki serinin birlikte yakınsak olduğu aralık, diferansiyel denklemin genel çözümünün geçerli olduğu bölgeyi verecektir.

Kuvvet serilerinin yakınsaklık aralığının bulunması ile ilgili olarak burada birkaç örnek verilecek ve ileride karşılaşılacak kuvvet serilerinin yakınsaklık aralığının bulunması işi ise okuyucuya bırakılacaktır.

Örnek 1. x'in hangi değerleri için

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n$$

serisinin yakınsak olduğunu bulunuz.

Mutlak yakınsaklık orantı testi seriye uygulanırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(x+1)^{n+1}}{n(x+1)^n} \right| = |x+1| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = |x+1|$$

bulunur. Eğer, $|x+1| < 1$ ise seri yakınsaktır. Bunun anlamı, seri $-2 < x < 0$ aralığında yakınsaktır ve yakınsaklık yarıçapı $R = 1$'dir.

Örnek 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Orantı testini uygularsak,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{(x+1)^n} \right| = \frac{|x+1|}{2}$$

bulunur. Öyle ise, $|x+1| < 2$ veya $-3 < x < 1$ için seri mutlak yakınsaktır. Buradan, serinin yakınsaklık yarıçapı $R = 2$ bulunur.

Örnek 3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2x^{n+1}}{(n+1)n} \frac{n(n-1)}{2x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = |x|$$

öyle ise seri $|x| < 1$ veya $-1 < x < 1$ için yakınsaktır ve yakınsaklık yarıçapı $R = 1$'dir.

Örnek 4. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n(n-1)}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Serinin yakınsak olması için,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)n} \frac{n(n-1)}{(x-1)^n} \right| < 1$$

olmalıdır. Buradan,

$$|x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} < 1$$

veya, $|x-1| < 1$ bulunur. Öyle ise, $0 < x < 2$ aralığında seri yakınsaktır ve $R = 1$'dir.

Örnek 5. $y(x) = a_0 x^{1/2} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\right)$

serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$u_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = a_{2n} x^{2n}$$

şeklinde yazılabilir. Serinin yakınsaklık yarıçapı,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2n+2)(2n+3) = \infty$$

bulunur. Buradan anlaşılıyor ki, x'in her değeri için seri yakınsaktır.

Örnek 6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Yakınsaklık yarıçapı,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n+3}{2n+1}\right| = 1$$

dır. $|x| < R$ değerleri için seri yakınsak olduğundan, yakınsaklık aralığı $-1 < x < 1$ olur.

Örnek 7. $y(x) = a_0\left[1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3.5}x^6 + \frac{1}{3.5.7}x^8 - \ldots\right]$

serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Burada orantı testi kullanılır. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n x^n}{a_{n-2}x^{n-2}}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-2}}\right|$$

$$= x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}$$

$$= 0$$

olduğuna göre, x'in her değeri için seri yakınsaktır.

6-3 KUVVET - SERİLERİ ÇÖZÜM METODU

İkinci mertebeden, değişken katsayılı, lineer ve homogen bir diferansiyel denklem,

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \qquad (8)$$

şeklinde verilmiş olsun. Amacımız, bazı şartlar altında bu denklemin genel çözümünü bulmaktır. Bu denklemin bütün terimleri $P(x)$ ile bölünürse, (8) denklemi aşağıdaki şekli alır.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Q}{P}\frac{dy}{dx} + \frac{R}{P}y = 0 \qquad (9)$$

Burada Q/P ve R/P fonksiyonları, $x = 0$ noktası etrafında Taylor serisine açılabilen x'in herhangi fonksiyonlarıdır. Bu durumda, ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem olan (8) denklemi için hemen aklımıza gelen çözüm şekli, herbiri $x = 0$ noktası etrafında Taylor serisine açılabilen iki fonksiyon'un lineer kombinasyonu olan bir fonksiyon olmasıdır.

Yukarıda verilen (9) denklemini,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0 \qquad (10)$$

şeklinde yazalım. Burada,

$$P_1(x)\frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{ve} \quad P_2(x)\frac{R(x)}{P(x)} \quad \text{dır.}$$

Şimdi, yukarıda değindiğimiz şekilde, (10) numaralı denklemin çözümünü ele alabilmek için önce, "Analitik Fonksiyon" ne demektir, onu tarif edelim; sonra da, yukarıda verilen $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ fonksiyonlarının hangi şartlar altında birer analitik fonksiyon olduklarını araştıralım.

Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu, $x = x_0$ noktası yakınında,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

şeklinde yazılan Taylor serisine açılabiliyorsa ve x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta x'in bütün değerleri için bu Taylor açılımı, $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşıyorsa, o zaman adı geçen fonksiyona $x = x_0$ noktasında "Analitik Fonksiyon" denir. Bu durumda yukarıda verilen Taylor açılımı,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

şeklini alır. Buradan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ katsayıları, değerleri bulunması gereken sabit sayılardır.

Analitik fonksiyonlar için yukarıda verilen tarif gözönüne alınırsa hemen söyleyebiliriz ki, bütün polinom (çokterimli) fonksiyonlar her yerde analitik'dir. Ayrıca e^x, $\cos x$, $\sin x$ fonksiyonları da her yerde analitik'dir. $f(x)/g(x)$ şeklindeki bütün fonk-

siyonlar ise, paydada bulunan $g(x)$ fonksiyonu "sıfır" yapmayan her x değeri için analitik'tir.

Örnek olarak, $(2x + 1)/x(x-2)$ fonksiyonu $x = 0$ ve $x = 2$ noktalarının dışında her x değeri için analitik'tir.

Şimdi, (10) numaralı diferansiyel denklemi tekrar gözönüne alalım. Eğer, $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de, herhangi bir x noktasında, örneğin $x = x_0$ noktasında analitik ise, başka bir deyişle, $P_1(x_0)$ ve $P_2(x_0)$ her ikisi de belli ve sonlu reel sayılar ise, bu durumda $x = x_0$ noktasına **adi nokta** denir.

Eğer, bu fonksiyonların her ikisi de veya yalnız biri, $x = x_0$ noktasında analitik değilse, o zaman $x = x_0$ noktasına, diferansiyel denklemin bir **"Münferid"**, **"Singüler"** veya **tekil noktası** denir.

Örnek olarak, aşağıda verilen üç diferansiyel denklemi gözönüne alalım.

$$(1 - x^2)y'' + xy' + 2y = 0 \qquad \text{(i)}$$

diferansiyel denkleminde, $x = 1$ ve $x = -1$ noktaları, denklemin tekil noktalarıdır. Bu iki noktanın dışında kalan her nokta denklemin bir adi noktasıdır.

İkinci olarak,

$$y'' + 3xy' - y = 0 \qquad \text{(ii)}$$

diferansiyel denklemine göz atalım. Yukarıda verilen tarif uyarınca, bu denklemin herhangi bir tekil noktası yoktur.

Son olarak,

$$3xy'' + y' + 2xy = 0 \qquad \text{(iii)}$$

denkleminin ise bir tek tekil noktası vardır ve o nokta, $x = 0$ noktasıdır.

6-4 ADİ NOKTA ETRAFINDA ÇÖZÜM

Bizim amacımız, değişken katsayılı ikinci mertebe ve lineer bir diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmaktır. Yukarıda verilen tarifler ise, bu konuda birer hatırlatma ve ön bilgi niteliğindedir.

Bazı şartlar altında, bir diferansiyel denklemin genel çözümünü veren çok önemli bir teorem, ispatı verilmeksizin, aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem: $x = x_0$ noktası, (10) numaralı diferansiyel denklemin bir adi noktası ise, bu denklemin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \qquad (11)$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümü veya başka bir deyişle, "Taylor Serisi" çözümü vardır. $x = x_0$ noktasını içeren bir aralıkta bu kuvvet serisi, diferansiyel denklemin çözümünü veren bir $y = f(x)$ fonksiyonuna yaklaşır.

Denk. 10, herşeyden önce ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Bu nedenle genel çözüm, iki keyfi sabit içermek durumundadır. Öyle ise bu denklemin, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ gibi birbirinden lineer bağımsız iki ayrı kuvvet serisi çözümü olmalıdır ve bunların lineer kombinasyonu, denklemin genel çözümünü veren ve belli bir aralıkta bir $y(x)$ fonksiyonuna yaklaşan bir kuvvet serisi olacaktır. Buna göre, A ve B herhangi iki keyfi sabite olmak üzere, denklemin genel çözümü,

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

olur. Görülüyor ki, denklemin genel çözümünü bulmak için önce $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümlerinin ayrı ayrı bulunması gerekmektedir.

Burada önemli bir noktayı tekrar vurgulamakta yarar vardır. Bir diferansiyel denklemin kuvvet serisi cinsinden genel çözümü bulunduktan sonra, bu çözümün geçerli olduğu aralığın belirlenmesi gerekir. Bunun için $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ serilerinin herbirinin yakınsaklık aralığı bulunmalıdır.

Eğer $x = x_0$ noktası gözönüne alınan kuvvet serisinin bir adi noktası ise, $|x - x_0| < R$ aralığında bulunan bütün x değerleri için seri yakınsaktır. Serinin, ileride tarifi verilecek olan bir tekil noktası yok ise $R = \infty$ olacaktır. Eğer serinin bir veya daha fazla tekil noktası varsa, o zaman R'nin değeri, $x = x_0$ adi noktası ile kompleks düzlem içinde bulunan en yakın tekil nokta arasındaki uzaklığa eşit olacaktır.

Örneğin, $x_0 = 1$ ise ve serinin en yakın tekil noktası da $x' = \sqrt{-1} = i$ noktası ise, bu iki nokta arasındaki uzaklık $R = \sqrt{2}$ olur ve $|x - 1| < \sqrt{2}$ veya $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ aralığındaki x değerleri için seri yakınsaktır.

Şimdi, (10) numaralı diferansiyel denklemde, $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ fonksiyonlarının x 'ın her değeri için analitik fonksiyonlar olması halinde, herhangi bir $x = x_0$ adi noktası yakınında (veya etrafında) kuvvet serileri cinsinden genel çözümün nasıl bulunduğunu, aşağıda örneklerle göstermeye çalışalım.

Eğer, başkaca birşey istenmiyorsa ve $x_0 = 0$ noktası da denklemin bir adi noktası ise, o zaman bu nokta etrafında denklemin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

şeklindeki genel çözümünü bulmak çok uygun olur.

Örnek 1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

diferansiyel denkleminin $x_0 = 0$ noktası yakınındaki kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

Verilen diferansiyel denklem için $P_1(x) = x$ ve $P_2(x) = 2$ 'dir. Görülüyor ki, x 'in her değeri için bu fonksiyonlar analitikdir. Bu nedenle denklemin, $x_0 = 0$ noktası yakınında,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \tag{12}$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümü vardır. y 'nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa,

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{13}$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{14}$$

elde edilir. (12), (13) ve (14) numaralı seriler diferansiyel denklemde yerlerine konursa,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

bulunur. İkinci terimde, toplama işareti dışında bulunan x, toplama işareti içine alınabilir. O zaman,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \tag{15}$$

elde edilir. Burada, toplamalardan biri, $n = 0$ 'dan, diğeri $n = 1$ 'den ve üçüncüsü de $n = 2$ 'den başlamaktadır. Ayrıca, x 'in üsleri de n ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda, (15) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir. Bunun için önce, bu denklemin birinci teriminde x 'in mertebesi $n-2$ olduğundan, denklemdeki indisler üzerinde bir değiştirme yapılır ve $n-2 = m$ alınırsa buradan $n = m+2$ bulunur. Ayrıca, n ile m arasındaki bu bağıntıda, $n = 2$ için $m = 0$ ve $n-1$ için ise $m+1$ bulunur. Öyle ise,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m$$

yazılabilir. Bu durumda yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında m yerine n yazmakla hiçbirşeyi değiştirmiş olmayız. O zaman (15) denklemi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^n = 0$$

şeklini alır. Burada önce, $n = 0$ için toplama yapılır, sonra da $n = 1$ 'den başlayan toplamada bütün terimler x^n çarpanına ayrılırsa,

$$(2a_2 + 2a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + 2a_n\right] x^n = 0$$

elde edilir. Bu toplama yapılsa bütün x 'li terimlerin katsayıları sıfır'a eşit olacağından, yukarıdaki denklemden

$$2a_2 + 2a_0 = 0$$

ve

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + 2a_n = 0, \qquad n \geq 1 \tag{16}$$

elde edilir. Birinci denklemden $a_2 = -a_0$ bulunur. İkinci denklem sadeleştirilirse,

$$a_{n+2} = -\frac{1}{n+1}a_n, \qquad n \geq 1 \tag{17}$$

olur. Denk. 17 'ye **rekürans formülü** denir ve $n \geq 1$ için tüm a_n değerleri bu formül yardımıyla aşağıdaki şekilde elde edilir.

Çift İndisli Katsayılar	Tek İndisli Katsayılar
$a_2 = -a_0$	$a_1 = a_1$
$a_4 = -\frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3}$	$a_3 = -\frac{a_1}{2}$
$a_6 = -\frac{a_4}{5} = -\frac{a_0}{3.5}$	$a_5 = -\frac{a_3}{4} = \frac{a_1}{2.4}$
$a_8 = -\frac{a_6}{7} = \frac{a_0}{3.5.7}$	$a_7 = -\frac{a_5}{6} = \frac{a_1}{2.4.6}$
$a_{10} = -\frac{a_8}{9} = -\frac{a_0}{3.5.7.9}$	$a_9 = -\frac{a_7}{8} = \frac{a_1}{2.4.6.8}$
$\vdots$	$\vdots$
$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{1.3.5\ldots(2n-1)}$	$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{2.4.6\ldots(2n)}$

Görülüyor ki tüm a_n katsayıları, a_0 veya a_1 gibi sıfır'dan farklı herhangi iki keyfi sabite cinsinden ifade edilebilmektedir. Bu değerler, Denk. 12 'de yerlerine konursa,

$$y = a_0\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{3.5} + \frac{x^8}{3.5.7} - \ldots\right)$$

$$+ a_1\left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2.4} - \frac{x^7}{2.4.6} + \ldots\right) \tag{18}$$

elde edilir. Burada, parantez içinde verilen serilerin herbiri, diferansiyel denklemin lineer bağımsız iki çözümünün seriye açılmış şekilleridir. Bu nedenle Denk. 18, verilen diferansiyel denkleminin genel çözümü'dür.

Bir serinin rekürans formülü, o serinin yakınsaklık aralığının bulunmasında çok önemlidir. (17) formülü yardımıyla,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}|n+1| = \infty$$

bulunur. Bu demektir ki, her x değeri için genel çözüm geçerlidir.

Örnek 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + \left(x^2 - 3\right)y = 0$ (19)

denkleminin $x_0 = 0$ noktası etrafındaki kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

(19) denkleminin herhangi bir tekil noktası yoktur. $x_0 = 0$ noktası da denklemin bir adi noktasıdır. Bu nedenle, $x_0 = 0$ noktası etrafında denklemin genel çözümü,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{20}$$

dır. Şimdi, y'nin türevleri alınırsa,

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2}$$

elde edilir. y ve türevleri, (19) denkleminde yerlerine konursa,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} 3\,a_n x^n = 0$$

olur. Burada, bütün terimler için x 'in üssü aynı olacak şekilde yukarıdaki denklem yeniden düzenlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\,a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3\,a_n x^n = 0 \qquad (21)$$

bulunur.

Şimdi burada toplama ile ilgili olarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n x^n \qquad (22)$$

kuralını uygulayabiliriz. O zaman yukarıda verilen (21) denklemi,

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)\,a_{n+2}x^n + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n - 3a_0 - 3a_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} 3\,a_n x^n = 0$$

veya

$$(2a_2 - 3a_0) + (6a_3 - 2a_1)\,x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\,a_{n+2} + n a_n\right.$$

$$\left. + a_{n-2} - 3\,a_n\right] x^n = 0$$

şeklini alır. Buradan,

$$2a_2 - 3a_0 = 0 \qquad (23)$$

$$6a_3 - 2a_1 = 0 \qquad (24)$$

$$(n+2)(n+1)\,a_{n+2} + (n-3)a_n + a_{n-2} = 0\,, \qquad n \geq 2 \qquad (25)$$

elde edilir. Denk. 23 'den $a_2 = 3/2a_0$ ve Denk. 24 'den $a_3 = 1/3a_1$ bulunur. (25) numa-ralı denklem ise, geri kalan katsayıları a_0 ve a_1 cinsinden bulmamıza yarıyan rekürans formülünden başka birşey değildir. Bu denklem yeniden düzenlenirse,

$$a_{n+2} = -\frac{(n-3)\,a_n + a_{n-2}}{(n+2)(n+1)}\,, \qquad n \geq 2 \qquad (26)$$

bulunur.

$$n = 2 \text{ için,} \qquad a_4 = -\frac{-a_2 + a_0}{12} = -\frac{-\frac{3}{2}a_0 + a_0}{12} = \frac{a_0}{24}$$

$$n = 3 \text{ için,} \qquad a_5 = -\frac{a_1}{20} = -\frac{a_1}{20}$$

$$n = 4 \text{ için,} \qquad a_6 = -\frac{a_4 + a_2}{30} = -\frac{\frac{1}{24}a_0 + \frac{3}{2}a_0}{30} = -\frac{37}{720}a_0$$

$$n = 5 \text{ için,} \qquad a_7 = -\frac{2a_5 + a_3}{42} = -\frac{2 \cdot \frac{1}{20}a_1 + \frac{1}{3}a_1}{42} = -\frac{a_1}{180}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

olur. Geri kalan tüm katsayılar aynı şekilde bulunur. Görülüyor ki burada, çift katsayılar a_0 cinsinden ve tek katsayılar ise a_1 cinsinden bulunabilmektedir. Bütün bu katsayılar (20) denkleminde yerlerine konursa,

$$y = a_0 + a_1x + \frac{3}{2}a_0x^2 + \frac{1}{3}a_1x^3 + \frac{1}{24}a_0x^4 - \frac{1}{20}a_1x^5$$
$$- \frac{37}{720}a_0x^6 - \frac{1}{180}a_1x^7 + \ldots$$

veya

$$y = a_0\left(1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{37}{720}x^6 + \ldots\right)$$
$$+ a_1\left(x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{180}x^7 + \ldots\right)$$

bulunur.

Örnek 3. Aşağıda, başlangıç şartları verilen diferansiyel denklemin kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{27}$$

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 3$$

Önce diferansiyel denklemin genel çözümünü bulalım. Denk. 27 'nin herhangi bir tekil noktası yoktur. Buna göre, her nokta etrafında, örneğin $x_0 = 0$ noktası etrafında bir çözüm bulunabilir.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2}$$

Bu değerler, Denk. 27 'de yerlerine konursa,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + (n+1)\, a_n\right] x^n = 0$$

elde edilir. Buradan

$$2a_2 + a_0 = 0 \tag{28}$$

ve

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0, \qquad n \geq 1$$

yazılır. Rekürans formülü yeniden yazılırsa,

$$a_{n+2} = -\frac{n+1}{(n+2)(n+1)}\, a_n, \quad \text{veya} \quad a_{n+2} = -\frac{1}{n+2}\, a_n, \quad n \geq 1 \tag{29}$$

bulunur. Denk. 28 'den $a_2 = -a_0/2$ elde edilir. Geri kalan a_n katsayıları ise, (29) numaralı rekürans formülünden aşağıdaki şekilde bulunur.

$$n = 1 \text{ için, } a_3 = -\frac{2}{6} a_1 = -\frac{1}{3} a_1$$

$$n = 2 \text{ için, } a_4 = -\frac{3}{12} a_2 = -\frac{1}{4}\left(-\frac{a_0}{2}\right) = \frac{1}{2.4} a_0$$

$$n = 3 \text{ için, } a_5 = -\frac{4}{20} a_3 = \frac{1}{3.5} a_1$$

$$n = 4 \text{ için, } a_6 = -\frac{5}{30} a_4 = -\frac{1}{2.4.6} a_0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Buna göre, Denk. 27 'nin genel çözümü,

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.4}x^4 - \frac{1}{2.4.6}x^6 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2.4.6\ldots 2n}x^{2n} + \ldots\right)$$

$$+ a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3.5}x^5 - \frac{1}{3.5.7}x^7 + \ldots\right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{1}{3.5.7\ldots(2n+1)}x^{2n+1} + \ldots\right)$$

veya

$$y = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2.4.6\ldots(2n)}\right] + a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3.5.7\ldots(2n+1)}\right] \qquad (30)$$

elde edilir.

Başlangıç şartlarından birincisi, Denk. 30 'a uygulanırsa, buradan $a_0 = 2$ elde edilir. Sonra Denk. 30 'un türevi alınır ve burada $y'(0) = 0$ başlangıç şartı uygulanırsa, buradan da $a_1 = 3$ bulunur.

Bu değerler Denklem 30 'da yerlerine konursa, (27) numaralı diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = 2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.4}x^4 - \ldots\right) + 3\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3.5}x^5 - \ldots\right)$$

veya

$$y = 2 + 3x - x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4.6}x^6 - \frac{1}{5.7}x^7 + \ldots$$

elde edilir.

Burada önemli bir noktayı vurgulamakta yarar vardır. Yukarıda, Örnek 3 'de verilen problemde, sınır şartları olarak $x = 0$ için y'nin ve y''nin değerleri verilmiş olduğundan, diferansiyel denklemin önce aynı nokta, yani $x_0 = 0$ adi noktası etrafındaki genel çözümü sonra da sınır şartları uygulanarak keyfi sabitlerin değerleri bulunmuştur. Eğer, sınır şartları x'in sıfır'dan farklı değerleri için verilseydi, örneğin $x = 1$ için $y(1)$ ve $y'(1)$'ın değerleri verilmiş olsaydı, o zaman öncelikle denklemin $x_0 = 1$ adi noktası etrafındaki

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 1)^n$$

genel çözümünün bulunması gerekirdi. Aşağıdaki örnek, bu konuya yeterince açıklık getirmektedir.

Örnek 4. $$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0, \qquad y(1) = 2, \qquad y'(1) = 4 \tag{31}$$

denklemini çözünüz.

Burada, $x_0 = 0$ noktası diferansiyel denklemin bir tekil noktası ve bu noktanın dışında her nokta, denklemin bir adi noktasıdır. Her adi nokta etrafındaki denklemin bir Taylor serisi çözümü bulunduğundan ve ayrıca $x = 1$ noktasında $y(1)$ ve $y'(1)$'ın değerleri verilmiş olduğundan, burada diferansiyel denklem için en uygun çözüm, $x_0 = 1$ adi noktası etrafındaki

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 1)^n \tag{32}$$

şeklindeki çözümdür.

Burada, $x - 1 = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa, (31) denklemi,

$$(t + 1)\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 4 \tag{33}$$

şekline dönüşür. Denklem 33 'ün $t = 0$ noktası etrafındaki genel çözümü ise,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \tag{34}$$

dır. Burada y 'nin birinci ve ikinci türevleri

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} \tag{35}$$

ve

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n t^{n-2} \tag{36}$$

olduğundan, bu değerler Denk. 33 'de yerlerine konursa,

$$(t+1)\sum_{n=0}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \tag{37}$$

elde edilir. (37) denklemi yeniden düzenlenirse,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2\, a_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n t^{n-1} + a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2\, a_n t^n = 0$$

$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n t^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2\, a_n t^n = 0$$

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n t^n = 0 \tag{38}$$

veya

$$a_1 + 2a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)^2 a_{n+1} + (n+1)(n+2)\, a_{n+2} + 2a_n \right] t^n = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$a_1 + 2a_2 + 2a_0 = 0 \tag{39}$$

ve

$$(n+1)^2 a_{n+1} + (n+1)(n+2) a_{n+2} + 2a_n = 0, \qquad n \geq 1 \tag{40}$$

yazılır. Denklem 39 'dan,

$$a_2 = -\frac{2a_0 - a_1}{2} = -a_0 - \frac{a_1}{2}$$

bulunur. Geri kalan tüm a_n değerleri de, (40) bağıntısı yardımı ile, aşağıda görüldüğü şekilde, a_0 ve a_1 cinsinden elde edilir.

$$a_{n+2} = -\frac{(n+1)^2 a_{n+1} + 2a_n}{(n+1)(n+2)}, \qquad n \geq 1$$

$n = 1$ için, $\quad a_3 = -\dfrac{4a_2 + 2a_1}{2.3} = \dfrac{2a_0}{3}$

$n = 2$ için, $\quad a_4 = -\dfrac{9a_3 + 2a_2}{3.4} = -\dfrac{4a_0 - a_1}{12}$

$n = 3$ için, $\quad a_5 = -\dfrac{16a_4 + 2a_3}{4.5} = \dfrac{3a_0 - a_1}{15}$

$n = 4$ için, $\quad a_6 = -\dfrac{25a_5 + 2a_4}{5.6} = -\dfrac{-26a_0 + 9a_1}{180}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

bulunur. Katsayıların bu değerleri, Denklem 34 'de yerlerine konursa,

$$y = a_0 + a_1 t + \left(-a_0 - \frac{a_1}{2}\right) t^2 + \frac{2a_0}{3} t^3 + \frac{-4a_0 + a_1}{12} t^4$$

$$+ \frac{3a_0 - a_1}{15} t^5 + \frac{-26a_0 + 9a_1}{180} t^6 + \ldots \qquad \text{veya}$$

$$y = a_0\left(1 - t^2 + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{13}{96}t^6 + \ldots\right)$$

$$+ a_1\left(t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{15}t^5 + \frac{1}{20}t^6 + \ldots\right) \qquad (41)$$

elde edilir. Denklem 41 'in türevleri alınırsa,

$$y' = a_0\left(-2t + 2t^2 - \frac{4}{3}t^3 + t^4 - \frac{13}{15}t^5 + \ldots\right)$$

$$+ a_1\left(1 - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 + \frac{3}{10}t^5 + \ldots\right) \qquad (42)$$

bulunur. Denk. 33 'de verilmiş bulunan başlangıç şartları, (41) ve (42) numaralı denklemlere uygulanırsa, $a_0 = 2$ ve $a_1 = 4$ bulunur. Böylece (33) denkleminin genel çözümü,

$$y = 2 + 4t - 4t^2 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{4}{45}t^6 + \dots$$

elde edilir. Burada, t yerine $(x - 1)$ konursa, (31) denkleminin çözümü,

$$y = 2 + 4(x-1) - 4(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{3}(x-1)^4 + \frac{2}{15}(x-1)^5 - \frac{4}{45}(x-1)^6 + \dots$$

elde edilir.

Örnek 5. $(x^3 - 1)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^2\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$

denkleminin $x_0 = 0$ noktası etrafındaki kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir adi noktasıdır. Bu durumda denklemin,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

şeklinde bir çözümü vardır. y 'nin türevleri,

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

dır. y ve türevleri denklemde yerlerine konursa,

$$(x^3 - 1)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

elde edilir. Yeniden düzenlenirse,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

veya

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)\,(n+2)\,a_{n+3} x^{n+1}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

bulunur. Buradan,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n+1} - \Big[2a_2 + (3)\,(2)\,a_3 x + (4)\,(3)\,a_4 x^2$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (n+3)\,(n+2)\,a_{n+3} x^{n+1} \Big] + \left[a_1 x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n+1} \right]$$

$$+ \left[a_0 x + a_1 x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n+1} \right] = 0$$

veya

$$-2a_2 + (a_0 - 6a_3)x + (2a_1 - 12a_4)x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \Big[(n^2+1)\,a_n$$

$$- (n+3)\,(n+2)\,a_{n+3}\,x^{n+1} \Big] = 0$$

elde edilir. Burada, her derecedeki x'ın katsayısı sıfır'a eşit yazılırsa,

$$a_2 = 0\,, \quad a_3 = \frac{1}{6} a_0 \quad \text{ve} \quad a_4 = \frac{1}{6} a_1$$

bulunur. Ayrıca, denklemin rekürans formülü,

$$a_{n+3} = \frac{n^2+1}{(n+3)\,(n+2)} a_n\,, \quad n \geq 2 \quad \text{dır.}$$

$n \geq 2$ için bu formülden a_5 ve diğer katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$a_5 = \frac{5}{5 \cdot 4} a_2 = 0 \qquad a_9 = \frac{37}{72} a_6 = \frac{37}{1296} a_0$$

$$a_6 = \frac{10}{30} a_3 = \frac{1}{18} a_0 \qquad a_{10} = \frac{50}{90} a_7 = \frac{85}{2268} a_1$$

$$a_7 = \frac{17}{42} a_4 = \frac{17}{252} a_1 \qquad \vdots$$

$$a_8 = \frac{26}{56} a_5 = 0$$

Katsayıların bu değerleri yerlerine konursa, verilen denklemin genel çözümü,

$$y = a_0\left[1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{18} + \frac{37x^9}{1296} + \ldots\right] + a_1\left[x + \frac{x^4}{6} + \frac{17x^7}{252} + \frac{85x^{10}}{2268} + \ldots\right]$$

bulunur.

Örnek 6. $\left(x^2+1\right)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$,

$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 0$

denkleminin $x_0 = 0$ noktası etrafındaki kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir adi noktasıdır.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} \quad \text{ve} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2}$$

Bu değerler denklemde yerlerine konursa,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2\, a_n x^{n+1} = 0$$

veya

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\, a_{n+1} x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)(n+2)\, a_{n+3} x^{n+1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2\, a_n x^{n+1} = 0$$

elde edilir. Tekrar düzenlenirse,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\,a_{n+1}x^{n+1} + \left[(2)(1)a_2 + (3)(2)\,a_3x + \sum_{n=1}^{\infty}(n+3)(n+2)\,a_{n+3}x^{n+1}\right]$$

$$+ \left[a_1x + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,a_{n-1}x^{n+1}\right] + \left[2a_0x + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,a_nx^{n+1}\right] = 0$$

veya

$$2a_2 + (6a_3 + a_1 + 2a_0)x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+3)(n+2)a_{n+3} + (n+1)^2 a_{n+1} + 2a_n\right]x^{n+1} = 0$$

olur. Buradan öncelikle,

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}a_0 - \frac{1}{6}a_1$$

bulunur. Geri kalan katsayılar da rekürans formülü yardımıyla bulunur.

$$a_{n+3} = -\frac{(n^2 + 2n + 1)\,a_{n+1} + 2a_n}{(n+3)(n+2)}, \quad n \geq 1$$

$$a_4 = -\frac{4a_2 + 2a_1}{4 \cdot 3} = -\frac{1}{6}a_1$$

$$a_5 = -\frac{9a_3 + 2a_2}{20} = -\frac{9}{20}\left(-\frac{1}{3}a_0 - \frac{1}{6}a_1\right) = \frac{3}{20}a_0 + \frac{3}{40}a_1$$

$$a_6 = -\frac{16a_4 + 2a_3}{30} = -\frac{8}{15}a_4 - \frac{1}{15}a_3 = \frac{1}{45}a_0 + \frac{1}{10}a_1$$

$$\vdots$$

Buna göre, denklemin genel çözümü,

$$y = a_0\left[1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{20}x^5 + \frac{1}{45}x^6 + \ldots\right]$$

$$+ a_1\left[x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{10}x^6 + \ldots\right]$$

elde edilir. Başlangıç şartları kullanılarak a_0 ve a_1'in değerleri bulunabilir.

$$y(0) = a_0 = 2$$

$y'(0) = a_1 = 3$

Bu değerler genel çözümde yerlerine konursa,

$$y = 2 + 3x - \frac{7}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{21}{40}x^5 + \frac{31}{90}x^6 + \ldots$$

bulunur.

6-5 TEKİL NOKTA ETRAFINDA ÇÖZÜM, FROBENİUS METODU

Yukarıda verilen (10) numaralı diferansiyel denklemi şimdi tekrar gözönüne alalım. Bu denklem,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)\,y = 0$$

dır. Kabul edelim ki, $x = x_0$ noktası bu denklemin bir tekil noktası olsun. Bunun anlamı, $P_1(x)$ veya $P_2(x)$ fonksiyonlarından birinin veya her ikisinin birden paydaları $(x - x_0)$ çarpanını içermektedir.

Eğer $P_1(x)$'in paydası $(x - x_0)$ çarpanını en fazla birinci dereceden ve $P_2(x)$'ın paydası da, $(x - x_0)$ çarpanını en fazla ikinci dereceden içeriyorsa, o zaman $x = x_0$ noktası, "Düzgün Münferit Nokta", veya "Düzgün Tekil Nokta" adını alır. Bu durumda, $(x - x_0)P_1(x)$ ve $(x - x_0)^2 P_2(x)$ fonksiyonlarından herbiri, $x = x_0$ noktasında analitiktir.

Örnek olarak, aşağıdaki diferansiyel denkleme bir göz atalım.

$$x(x-1)^2\frac{d^2y}{dx^2} + (x-2)\frac{dy}{dx} + (x+1)\,y = 0$$

Burada, $P_1(x) = \dfrac{x-2}{x(x-1)^2}$ ve $P_2(x) = \dfrac{x+1}{x(x-1)^2}$

dır. Görülüyor ki, $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları bu denklemin tekil noktalarıdır. Yukarıdaki tarife göre $x_0 = 0$ noktası bir düzgün tekil nokta ve $x_0 = 1$ noktası ise düzgün olmayan bir tekil noktadır.

Değişken katsayılı, ikinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklemin herhangi bir adi noktası etrafında bir Taylor serisi çözümü olduğunu biliyoruz. Yukarıda verilen tariflerden sonra hemen ifade edelim ki, eğer $x = x_0$ noktası, (10) numaralı denklemin bir düzgün tekil noktası ise, o zaman **Frobenius metodu** adı verilen bir metod yardımıyla, bu denklemin $x = x_0$ noktası etrafında bir çözümünü bulmak mümkün olmaktadır. Bu metoda göre aranan çözüm,

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{43}$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümüdür. Bu seriye **Frobenius serisi** denir. Burada, $a_0 = 0$ olmak üzere, önce r'nin mümkün olan değerlerinin, sonra da buna bağlı olarak a_n katsayılarının bulunması gerekmektedir. r 'nin ve a 'nın bulunan değerleri Denk. 43 'de yerlerine konursa, böylece elde edilen Frobenius serisi, $R<0$ olmak üzere, $0 < |x - x_0| < R$ aralığında ve x_0 noktası etrafında geçerli olan bir fonksiyona yaklaşır.

Eğer, gözönüne alınan düzgün tekil nokta, $x_0 = 0$ noktası ise, o zaman (43) denklemi,

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad a_0 \neq 0 \tag{44}$$

veya

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \qquad a_0 \neq 0 \tag{45}$$

şeklini alır. Genel olarak, $x_0 = 0$ noktası etrafında tarif edilmiş bulunan (45) denklemi şeklinde verilen çözümleri bulmaya çalışacağız.

Bir adi nokta etrafındaki kuvvet serisi çözümü yukarıda nasıl bulunmuş ise, bir düzgün tekil nokta etrafındaki Frobenius serisi çözümü de aynı şekilde bulunur.

(10) numaralı diferansiyel denklemi tekrar yazalım.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)\, y = 0 \tag{10}$$

$x_0 = 0$ noktası bu denklemin bir düzgün tekil noktası olsun. O zaman,

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad a_0 = 0 \tag{46}$$

veya

$$y = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \ldots + a_n x^{r+n} + \ldots$$

şeklinde bir çözüm vardır. (46) fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerini alırsak

$$\frac{dy}{dx} = a_0 r x^{r-1} + a_1 (r+1) x^r + a_2 (r+2) x^{r+1} + \ldots + a_n (r+n) x^{r+n-1} + \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a_0 r (r-1) x^{r-2} + a_1 (r+1) r x^{r-1} + a_2 (r+2)(r+1) x^r + \ldots$$

$$+ a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2} + \ldots$$

elde edilir.

Şimdi, y ve türevlerini (10) numaralı denklemde yerlerine koymadan önce, bu denklemin $x_0 = 0$ noktası etrafında bir çözümü olabilmesi için, $xp_1(x)$ ve $x^2p_2(x)$ fonksiyonlarının birer analitik fonksiyon olmaları gerektiğinden hareket ederek, $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ fonksiyonlarının aşağıda verildiği şekilde seriye açılımlarını bulmaya çalışalım. Biliyoruz ki,

$$xP_1(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n + \ldots \tag{47}$$

ve

$$x^2P_2(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \ldots + q_nx^n + \ldots \tag{48}$$

şeklinde yazılabilir. Burada p_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ ve $q_j = (j = 0, 1, 2, \ldots)$ herhangi sabit sayılardır. (47) ve (48) yeniden düzenlenirse,

$$P_1(x) = p_0 x^{-1} + p_1 + p_2 x + p_3 x^2 + \ldots p_n x^{n-1} + \ldots \tag{49}$$

$$P_2(x) = q_0 x^{-2} + q_1 x^{-1} + q_2 + q_3 x + \ldots + q_n x^{n-2} + \ldots \tag{50}$$

elde edilir. Şimdi, y, y', y'', $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ 'ın yukarıda bulunan değerleri, (10) denkleminde yerlerine konursa ve x 'in aynı kuvvetlerine göre düzenlenirse,

$$a_0 [r(r-1) + p_0 r + q_0] x^{r-2} + \{a_1 [(r+1) r + p_0 (r+1) + q_0]$$

$$+ a_0 (p_1 r + q_1)\} x^{r-1} + \ldots = 0 \tag{51}$$

bulunur. Burada, x 'in bütün kuvvetlerinin katsayıları sıfır'a eşittir. Örneğin, x^{r-2} 'nin katsayısı sıfır'a eşit yazılırsa

$$a_0 [r(r-1) + p_0 r + q_0] = 0, \qquad a_0 = 0$$

veya

$$r^2 + (p_0 - 1) r + q_0 = 0 \tag{52}$$

elde edilir. Burada p_0 ve q_0 bulunması gereken ve kolayca bulunabilen iki reel sayıdır.

r 'nin mümkün olan değerlerini veren bu önemli denkleme **indisel denklem** adı verilir. Denklem ikinci dereceden olduğu için r_1 ve r_2 gibi iki kökü vardır.

Diferansiyel denklemin genel çözümünün r_1 ve r_2 'nin değerlerine bağlı olacağı açıktır. Uygulamalar göstermiştir ki, büyük kök r_1 olmak üzere $r_1 - r_2$ 'nin

değerlerine bağlı olarak, (10) numaralı denklemin genel çözümü aşağıdaki şekillerden biri ile ifade edilebilir.

(i) N pozitif bir tam sayı olmak üzere, $r_1 - r_2 = 0$ ve $r_1 - r_2 = N$ ise, (10) numaralı denklemin biribirinden lineer bağımsız iki ayrı Frobenius serisi çözümü vardır. Bunlar,

$$y_1(x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad a_0 \neq 0$$

ve

$$y_2(x) = (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \qquad b_0 \neq 0$$

dır.

(ii) Eğer, $r_1 - r_2 = N$ ise, denklemin

$$y_1(x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad a_0 \neq 0$$

ve

$$y_2(x) = (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n + C y_1(x) \operatorname{Ln}(x - x_0), \qquad b_0 \neq 0$$

olmak üzere lineer bağımsız iki çözümü vardır. Burada C, sıfır veya sıfır 'dan farklı bir sabit sayıdır.

(iii) Eğer, $r_1 - r_2 = 0$ ise, lineer bağımsız iki çözüm,

$$y_1(x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad a_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n + y_1(x) \operatorname{Ln}(x - x_0), \qquad b_0 \neq 0$$

olur. Burada çözümlerin herbiri, $0 < |x - x_0| < R$ aralığında geçerlidir.

Şimdi (52) denklemi yardımıyla r_1 ve r_2'nin nasıl bulunduğunu aşağıda verilen iki örnekle açıklamaya çalışalım.

(1) $x^2 y'' + 3xy' + (1 - 2x)y = 0$

denklemini gözönüne alalım. (47) ve (48) denklemlerinden,

$$xP_1(x) = x \frac{3x}{x^2} = 3$$

ve

$$x^2P_2(x) = x^2\,\frac{1-2x}{x^2} = 1-2x$$

yazılır. Buradan, $p_0 = 3$ ve $q_0 = 1$ bulunur. Bu değerler (52) denkleminde yerlerine konursa,

$$r^2 + (3-1)r + 1 = 0 \qquad \text{veya} \qquad r^2 + 2r + 1 = 0$$

elde edilir. Buradan $r_1 = r_2 = -1$ bulunur.

(2) $x^2y'' - xy' + (x^2 + 8/9)y = 0$

$xP_1(x) = -1$, buradan $p_0 = -1$

ve

$$x^2P_2(x) = x^2 + \frac{8}{9}, \qquad \text{buradan} \qquad q_0 = 8/9$$

elde edilir. (52) denkleminde yerlerine konursa,

$$r^2 - 2r + \frac{8}{9} = 0$$

ve buradan $r_1 = 4/3$ ve $r_2 = 2/3$ bulunur.

Aşağıdaki örneklerde r_1 ve r_2 değerleri, Frobenius serisinin katsayıları ile birlikte bulunmuştur.

Örnek 1. $$2x\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = 0 \tag{53}$$

denklemini Frobenius metodu ile çözünüz.

$x_0 = 0$ noktası, denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. Bu nokta komşuluğunda denklemin, Frobenius serisi şeklinde bir genel çözümü vardır.

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \tag{54}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)\, a_n x^{r+n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)\, a_n x^{r+n-2}$$

y ve türevleri, Denklem 53 'de yerlerine konursa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\,(r+n)\,(r+n-1)\,a_n x^{r+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)\,a_n x^{r+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = 0$$

veya

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[2\,(r+n)\,(r+n-1) + (r+n)\right] a_n x^{r+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = 0$$

elde edilir. Tekrar düzenlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)\,(2r+2n-1)\,a_n x^{r+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = 0$$

olur. İkinci terimde n yerine $n-1$ konursa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)\,(2r+2n-1)\,a_n x^{r+n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n-1} = 0$$

bulunur. Buradan,

$$r\,(2r-1)\,a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(r+n)\,(2r+2n-1)\,a_n - a_{n-1}\right] x^{r+n-1} = 0$$

elde edilir. Burada, $a_0 \neq 0$ olduğu için,

$$r\,(2r-1) = 0 \tag{55}$$

ve

$$(r+n)\,(2r+2n-1)\,a_n - a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1 \tag{56}$$

elde edilir. Denklem 55'den $r_1 = 0$ ve $r_2 = 1/2$ bulunur. Görülüyor ki burada $r_1 - r_2 \neq N$ 'dır.

(1) $r_1 = 0$ için,

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n\,(2n-1)}, \quad n \geq 1$$

olduğundan,

$$a_1 = \frac{1}{1.1}\ a_0 = a_0$$

$$a_2 = \frac{1}{2.3}\ a_1 = \frac{1}{1.2 \times 3}\ a_0$$

$$a_3 = \frac{1}{3.5} \quad a_2 = \frac{1}{1.2.3 \times 3.5} a_0$$

$$a_4 = \frac{1}{4.7} \quad a_3 = \frac{1}{1.2.3.4 \times 3.5.7} a_0$$

$$a_5 = \frac{1}{5.9} \quad a_4 = \frac{1}{1.2.3.4.5 \times 3.5.7} a_0$$

$$a_6 = \frac{1}{6.11} \quad a_5 = \frac{1}{1.2.3.4.5.6 \times 3.5.7.9} a_0$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{1}{n(2n-1)} \quad a_{n-1} = \ldots = \frac{1}{n!(2n-1)!} a_0$$

elde edilir. Buna göre, $r_1 = 0$ için (53) denkleminin çözümü,

$$y_1 = a_0 \left[1 + x + \frac{x^2}{2!3} + \frac{x^3}{3!3.5} + \ldots + \frac{x^n}{n!(2n-1)!} + \ldots \right] \tag{57}$$

bulunur.

(2) $r_2 = \frac{1}{2}$ için, katsayıları b_n ile gösterirsek,

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{n(2n+1)}, \quad n \geq 1 \tag{58}$$

dır. Burada da bütün katsayılar aynı şekilde bulunur ve Denk. 54 'de yerlerine konursa,

$$y_2 = b_0 x^{1/2} \left[1 + \frac{x}{1.3} + \frac{x^2}{2!3.5} + \frac{x^3}{3!3.5.7} + \ldots + \frac{x^n}{n!(2n-1)!} + \ldots \right] \tag{59}$$

elde edilir. (57) ve (59) numaralı Frobenius kuvvet serilerinin herbiri, (53) numaralı diferansiyel denklemin birer çözümüdür. Ayrıca, bu fonksiyonlar biribiri ile lineer bağımsız olduklarından denklemin genel çözümü,

$$y = a_0 \left[1 + x + \frac{x^2}{2!3} + \frac{x^3}{3!3.5} + \frac{x^4}{4!3.5.7} + \ldots + \frac{x^n}{n!(2n+1)!} + \ldots \right]$$

$$+ b_0 x^{1/2} \left[1 + \frac{x}{1!3} + \frac{x^2}{2!3.5} + \frac{x^3}{3!3.5.7} + \ldots + \frac{x^n}{n!(2n+1)!} + \ldots \right]$$

bulunur.

Örnek 2. $2x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$ (60)

denkleminin, $x_0 = 0$ noktası etrafındaki Frobenius çözümünü bulunuz.

Denk. 60 'ın normalize olmuş şekli,

$$y'' + \frac{x}{2x^2}\,y' + \frac{x^2 - 1}{2x^2}\,y = 0$$

dır. Burada,

$$(x - x_0)\,P_1(x) = (x - 0)\,\frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

ve

$$(x - x_0)^2\,P_2(x) = (x - 0)^2\,\frac{x^2 - 1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)$$

olduğu için, $x_0 = 0$ noktasında bu fonksiyonlar analitiktir. Bu nedenle, $x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır ve bu nokta etrafında denklemin bir Frobenius çözümü vardır.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \qquad a_0 \neq 0 \tag{61}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)\,a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)\,a_n x^{n+r-2}$$

y ve türevleri, Denk. 60'da yerlerine konursa,

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)\,a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)\,a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \tag{62}$$

elde edilir. Önce, x 'in bütün kuvvetlerini eşit yapmak durumundayız. Bunun için,

$n + r + 2 = m + r$ değişken değiştirmesi yapılırsa buradan, $n = m - 2$ elde edilir. Burada, $n = 0$ için $m = 2$ olur. Öyle ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m+r} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r}$$

yazılabilir. Denk. 62 'de bu değiştirme yapılır ve sonra da bütün toplamlar n = 2 'den başlıyacak şekilde denklem yeniden düzenlenirse,

$$\left[2r(r-1)a_0x^r + 2r(r+1)a_1x^{r+1} + ra_0x^r - (r+1)a_1x^{r+1} - a_0x^r - a_1x^{r+1}\right]$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{\left[2(n+r)(n+r-1) + (n+r) - 1\right]a_n - a_{n-2}\right\} x^{n+r} = 0$$

bulunur. x 'ın aynı kuvvetlerine göre denklem tekrar düzenlenirse,

$$\left[(2r+1)(r-1)a_0 x^r + r(2r+3)a_1x^{r+1}\right.$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[(2n+2r+1)(n+r-1)a_n + a_{n-2}\right] x^{n+r} = 0$$

olur. Buradan,

(i) $a_0(2r+1)(r-1) = 0$, $a_0 = 0$

(ii) $r(2r+3)a_1 = 0$

(iii) $(2n+2r+1)(n+r-1)a_n + a_{n-2} = 0$

bulunur. Birinci denklemden, $r_1 = 1$ ve $r_2 = -\frac{1}{2}$ elde edilir. İkinci denklemden $a_1 = 0$ bulunur. Üçüncü denklem ise rekürans formülüdür ve önce $r_1 = 1$ için sonra da $r_2 = -\frac{1}{2}$ geriye kalan katsayıları verir.

(1) $r_1 = 1$ için rekürans formülü,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2n+3)}, \quad n \geq 2$$

olur. Buradan,

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(4+3)} = -\frac{1}{14}a_0$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{3(6+3)} = 0, \quad (a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0)$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4\,(8+3)} = -\frac{1}{44}\left(-\frac{1}{14}\right)a_0 = \frac{1}{616}\,a_0$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6\,(12+3)} = -\frac{1}{90}\left(\frac{1}{616}\right)a_0 = \frac{1}{55440}\,a_0$$

$$\vdots$$

elde edilir.

(2) $r_2 = -\frac{1}{2}$ için rekürans formülü

$$b_n = -\frac{b_{n-2}}{n\,(2n-3)}, \qquad n \geq 2$$

olur. Burada katsayılar a_n yerine b_n ile gösterilmiştir. Böylece,

$$b_2 = -\frac{b_0}{2\,(4-3)} = -\frac{1}{2}\,b_0$$

$$b_3 = -\frac{b_1}{3\,(6-3)} = 0\,, \qquad (b_1 = 0 \text{ olduğu için})$$

$$b_4 = -\frac{b_2}{4\,(8-3)} = -\frac{1}{20}\left(-\frac{1}{2}\right)b_0 = \frac{1}{40}\,b_0$$

$$b_6 = -\frac{b_4}{6\,(12-3)} = -\frac{1}{54}\left(\frac{1}{40}\right)b_0 = -\frac{1}{2160}\,b_0$$

$$\vdots$$

bulunur. y_1 ve y_2 fonksiyonlarının herbiri diferansiyel denklemin birer çözümü ise ve bu fonksiyonlar kendi aralarında lineer bağımsız ise, o zaman denklemin genel çözümü,

$y = a_0y_1 + b_0y_2$ olur.

Burada, $r_1 = 1$ için bir Frobenius çözümü, $r_2 = -\frac{1}{2}$ için ise ikinci bir Frobenius çözümü bulunmuştur. Böylece, (60) numaralı diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = a_0 x\left(x - \frac{1}{14}x^2 + \frac{1}{616}x^4 - \frac{1}{55440}x^6 + \ldots\right)$$

$$+ b_0 x^{-1/2}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{40}x^4 - \frac{1}{2160}x^6 + \ldots\right)$$

bulunur.

Örnek 3. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$ (63)

denklemini Frobenius metodu ile çözünüz.

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. Bu durumda,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \qquad a_0 \neq 0 \tag{64}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) a_n x^{n+r-2}$$

olur. Bu değerler, Denk. 63 'de yerlerine konursa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2}$$

$$- \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

bulunur. Burada, $n + 2 = m$ değişken değiştirmesi yaparak x'in bütün kuvvetleri $(n + r)$'ye eşitlenir. O zaman,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r}$$

$$- \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

veya

$$\left(r^2 - \frac{1}{4}\right) a_0 x^r + \left[(1 + r)^2 - \frac{1}{4}\right] a_1 x^{r+1}$$

$$+ \left\{\left[(n + r)^2 - 1/4\right] a_n + a_{n-2}\right\} x^{n+r} = 0$$

elde edilir. Buradan,

(i) $\left(r^2 - \frac{1}{4}\right) a_0 = 0, \qquad a_0 \neq 0$

(ii) $\left[(1+r)^2 - \frac{1}{4}\right] a_1 = 0$

(iii) $\left[(n+r)^2 - 1/4\right] a_n + a_{n-2} = 0$

yazılır. Birinci denklemden $r_1 = 1/2$ ve $r_2 = -1/2$ bulunur. Görülüyor ki, bu denklemde, $r_1 - r_2$ farkı pozitif bir tam sayıdır. Denklemin çözümünde bu durum gözönüne alınmalıdır.

İkinci ve üçüncü denklemlerde r yerine sıra ile önce r_1 değeri ve sonra da r_2 değeri konularak her defasında a_n katsayıları bulunur.

Önce, $r = r_1 = 1/2$ değerini gözönüne alalım. O zaman, ikinci denklemden,

$$\left[(1 + 1/2)^2 - 1/4\right] a_1 = 0$$

$$2\, a_1 = 0$$

elde edilir. Buradan, $a_1 = 0$ bulunur. Şimdi, $r_1 = 1/2$ değerini, rekürans formülü olan üçüncü denklemde r yerine koyalım. O zaman,

$$a_n = -\frac{1}{n\,(n+1)}\, a_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

elde edilir.

$$a_2 = -\frac{1}{2.3}\, a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{3.4}\, a_1 = 0, \qquad a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = a_{2n+1} = 0$$

$$a_4 = -\frac{1}{4.5}\, a_2 = \frac{1}{2.3.4.5}\, a_0$$

$$a_6 = -\frac{1}{6.7}\, a_4 = \frac{1}{2.3.4.5.6.7}\, a_0$$

$$\vdots$$

$$a_{2n} = -\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, a_0, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

bulunur. a_n değerleri Denk. 64 'de yerlerine konursa,

$$y_1(x) = a_0 x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}\right] \tag{65}$$

elde edilir.

Şimdi, $r = r_2 = -1/2$ değerini gözönüne alalım. r_2 'nin bu değeri yukarıdaki ikinci denklemde r yerine konursa,

$$\left[(1 - 1/2)^2 - 1/4\right] a_1 = 0$$

$$\left[1/4 - 1/4\right] a_1 = 0$$

$$[0]\, a_1 = 0$$

elde edilir. Görülüyor ki, burada a_1 'in değeri "sıfır" olabilir veya herhangibir keyfi sabit sayı olabilir. Kabul edelim ki, $a_1 = 0$ olsun. Ayrıca, $r_2 = -1/2$ için rekürans formülü,

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

olduğu için, diğer a_n değerleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$a_2 = -\frac{1}{2.1} a_0 = -\frac{1}{2} a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{3.2} a_1 = 0, \qquad a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = a_{2n+1} = 0$$

$$a_4 = -\frac{1}{4.3} a_2 = -\frac{1}{4.3}\left(-\frac{1}{2}\right) a_0 = \frac{1}{4.3.2} a_0$$

$$a_6 = -\frac{1}{6.5} a_4 = -\frac{1}{6.5.4.3.2} a_0$$

$$\vdots$$

$$a_{2n} = -\frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Yukarıdaki a_n değerleri (64) denkleminde yerlerine konursa,

$$y_2(x) = b_0 x^{-1/2}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right] \tag{66}$$

elde edilir. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ birbiriyle lineer bağımsız iki ayrı çözüm olduğu için, diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = Ax^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}\right] + Bx^{-1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right] \tag{67}$$

bulunur. Burada A ve B herhangi keyfi iki sabit sayıdır.

Şimdi geriye dönelim ve bu problemde, $r_1 - r_2$ farkının pozitif bir tam sayıya eşit olduğunu hatırlayalım. Bu durumda (63) denkleminin biribiri ile lineer bağımsız iki çözümünün

$$y_1 = (x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_0 \neq 0 \tag{68}$$

ve

$$y_2(x) = x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + C y_1(x) \operatorname{Ln} x, \quad b_0 \neq 0 \tag{69}$$

olduğunu ve burada C'nin sıfır veya sıfırdan farklı olabildiğini biliyoruz.

Yukarıda, $r_2 = -1/2$ için denklemin $y_2(x)$ çözümünü bulmaya çalışırken $a_1 = 0$ kabul etmiştik. Halbuki a_1'in sıfır 'dan farklı bir sabit sayı da olabildiğini biliyoruz. Bu durumda, $a_1 = 0$ alındığı zaman, (69) denklemi ile verilen $y_2(x)$ çözümünün farklı bir çözüm olacağı açıktır.

Önce, $r_1 = 1/2$ değeri gözönüne alınırsa, bu durumda, yukarıda olduğu gibi,

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{(2n+1)!} x^{2n}\right] \tag{70}$$

elde ederiz. Bu durumda $y_1(x)$ çözümünde bir değişiklik olmayacaktır.

İkinci olarak, $r_2 = -1/2$ için yukarıda gördük ki, rekürans formülü,

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad \text{ve} \quad a_0 \neq 0$$

Şimdi burada, $a_0 = 0$ şartına ek olarak $a_1 \neq 0$ alınırsa,

$$a_2 = -\frac{1}{2.1}\, a_2 = -\frac{1}{2}\, a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{3.2}\, a_1, \qquad (a_1 \neq 0)$$

$$a_4 = -\frac{1}{4.3}\, a_2 = \frac{1}{4.3.2}\, a_0$$

$$a_5 = -\frac{1}{5.4}\, a_3 = -\frac{1}{5.4}\left(-\frac{1}{3.2}\, a_1\right) = \frac{1}{5.4.3.2}\, a_1$$

$$a_6 = -\frac{1}{6.5}\, a_4 = -\frac{1}{6.5.4.3.2}\, a_0$$

$$a_7 = -\frac{1}{7.6}\, a_5 = -\frac{1}{7.6.5.4.3.2}\, a_1$$

$$\vdots$$

elde edilir. Bu değerler Denk. 69 'da yerlerine konursa ve burada $C = 0$ kabul edilirse ve ayrıca a yerine b yazılırsa,

$$y_2(x) = x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + C y_1(x) \operatorname{Ln} x$$

$$= x^{-1/2} \left\{ b_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} \right] + b_1 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n+1} \right] \right\} \qquad (71)$$

olur. Bu çözüm yeniden düzenlenirse,

$$y_2(x) = b_0 x^{-1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} \right] + b_1 x^{1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n} \right] \qquad (72)$$

elde edilir. Görülüyor ki, r'nin küçük değeri olan $r_2 = -1/2$ için elde edilen $y_2(x)$ çözümü ile, (67) numaralı genel çözüm arasında hiçbir fark yoktur. Burada, $y_2(x)$ aynı zamanda genel çözümdür.

Örnek 4. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x \dfrac{dy}{dx} + \left(x^3 - 1\right) y = 0$ (73)

denkleminin, $x_0 = 0$ noktası yakınındaki Frobenius çözümünü bulunuz.

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. Öyle ise denklemin, $0 < x < R$ aralığında

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \tag{74}$$

şeklinde bir çözümü vardır. (74) 'ün türevleri,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)\, a_n x^{n+r-1} \quad \text{ve} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)(n + r)\, a_n x^{n+r-2}$$

dır. y ve türevleri (73) denkleminde yerlerine konursa,

$$(n + r - 1)(n + 1)\, a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)\, a_n x^{n+r} + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

veya

$$\left[r(r-1) a_0 x^r + r(r+1) a_1 x^{r+1} + (r+1)(r+2) a_2 x^{r+2} + \left[r a_0 x^r \right.\right.$$

$$\left.\left. + (r+1) a_1 x^{r+1} + (r+2) a_2 x^{r+2} \right] - \left[a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} \right]\right.$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \left\{ \left[(n + r)^2 - 1 \right] a_n + a_{n-3} \right\} x^{n+r} = 0$$

elde edilir. Buradan sıra ile,

(i) $(r - 1)(r + 1) a_0 = 0, \qquad a_0 \neq 0$

(ii) $r(r + 2)\, a_1 = 0$

(iii) $(r + 1)(r + 3)\, a_2 = 0$

(iv) $\left[(n + r)^2 - 1 \right] a_n + a_{n-3} = 0, \qquad n \geq 3$

yazılır. Birinci denklemden, $r_1 = 1$ ve $r_2 = -1$ bulunur. Görülüyor ki, $r_1 - r_2 = 2$ dir. Bu durumda, küçük r değeri, $r_2 = -1$ için bulunacak $y_2(x)$ çözümü, aynı zamanda *(73)* denkleminin genel çözümünü verecektir. Şimdi bu çözümü bulalım.

$r_2 = -1$ için, yukarıda verilen ikinci denklemden, $a_1 = 0$ bulunur. Üçüncü denklemden ise,

$(-1 + 1)(-1 + 3) a_2 = 0$ ve buradan $a_2 \neq 0$

bulunur. a_2 keyfi bir sabit sayıdır. $a_3, a_4, a_5, \ldots$ katsayıları ise dördüncü denklem, yani rekürans formülü yardımıyla aşağıdaki şekilde bulunur.

$$a_n = -\frac{a_{n-3}}{n(n-2)}, \qquad n \geq 3, \qquad a_0 \neq 0$$

$$a_3 = -\frac{a_0}{3(1)} = -\frac{1}{3}a_0$$

$$a_4 = -\frac{a_1}{4(2)} = 0, \qquad \text{(Çünkü, } a_1 = 0 \text{ 'dır).}$$

Aynı şekilde, $a_7 = 0$, $a_{10} = 0$, ... dır.

$$a_5 = -\frac{a_2}{5(3)} = -\frac{1}{5.3}a_2$$

$$a_6 = -\frac{a_3}{6(4)} = \frac{1}{6.4.3}a_0$$

$$a_8 = -\frac{a_5}{8(6)} = \frac{1}{8.6.5.3}a_2$$

$$a_9 = -\frac{a_6}{9(7)} = -\frac{1}{9.7.6.4.3}a_0$$

$$a_{11} = -\frac{a_8}{11(9)} = \frac{1}{11.9.8.7.6.5.3}a_2$$

$$\vdots$$

(74) denkleminde, $r = r_2 = -1$ yazılır ve yukarıda bulunan katsayılar yerlerine konursa, a_0 ve a_2 keyfi sabit sayılar olmak üzere,

$$y_2(x) = x^{-1}\left(a_0 + a_2x^2 - \frac{1}{3}a_0x^3 - \frac{1}{3.5}a_2x^5 + \frac{1}{3.4.6}a_0x^6\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3.5.6.8}a_2x^8 - \frac{1}{3.4.6.7.9}a_0x^9 - \ldots\right)$$

bulunur. Yeniden düzenlenirse ve burada a_0 ve a_2 yerine iki keyfi sabit sayı olarak a ve b kullanılırsa, Denk. 73 'ün genel çözümü,

$$y = ax^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{3n}}{(1.3)(4.6)\ldots(3n-2)(3n)}\right]$$

$$+ bx\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{3n}}{(3.5)(6.8)\ldots(3n)(3n+2)}\right]$$

elde edilir.

Örnek 5. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + (1-2x)y = 0$ (75)

denkleminin, $x_0 = 0$ noktası yakınındaki çözümünü bulunuz.

Görülüyor ki, $x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. O zaman, Denk. 75 'in

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

şeklinde bir çözümü vardır. y ve türevleri Denk. 75 'de yerlerine konursa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1}x^{n+r} = 0$$

olur. Denklem yeniden düzenlenirse,

$$\left[r(r-1)a_0 + 3ra_0 + a_0\right]x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[(n+r)^2 + 2(n+r) + 1\right]a_n - 2a_{n-1}\right\}x^{n+r} = 0$$

elde edilir. Buradan,

(i) $(r+1)^2 a_0 = 0, \qquad a_0 \neq 0$

(ii) $\left[(n+r)^2 + 2(n+r) + 1\right]a_n - 2a_{n-1} = 0, \qquad n \geq 1$

elde edilir.

Birinci denklemden, $r_1 = r_2 = -1$ bulunur. Bu demektir ki, $r_1 - r_2 = 0$'dır. O zaman, denklemin lineer bağımsız iki çözümü,

$$y_1(x) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad a_0 \neq 0 \tag{76}$$

$$y_2(x) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + y_1(x) \operatorname{Ln} x, \qquad b_0 \neq 0$$

olur. $r = r_1 = r_2 = -1$ olduğuna göre, rekürans formülü,

$$a_n = \frac{2a_{n-1}}{n^2}, \qquad n \geq 1 \qquad \text{ve} \qquad a_0 \neq 0$$

olur. Buradan tüm katsayılar bulunur.

$$a_1 = \frac{2a_0}{1^2} = 2a_0$$

$$a_2 = \frac{2a_1}{2^2} = \frac{2^2}{2^2} a_0$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{3^2} = \frac{2^3}{2^2 . 3^2} a_0$$

$$a_4 = \frac{2a_3}{4^2} = \frac{2^4}{2^2 . 3^2 . 4^2} a_0$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{2^n}{(1.2.3 \ldots n)^2} = \frac{2^n}{(n!)^2}, \qquad n \geq 1$$

Bu değerler, (76) 'nın birinci denkleminde yerlerine konursa,

$$y_1(x) = a_0 x^{-1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^2} x^n \right]$$

elde edilir.

Şimdi $y_2(x)$'in bulunmasını gözönüne alalım. Denk. 76 'da, ikinci denklemde görülen b_n katsayıları yukarıda izlediğimiz yöntemlerin dışında ve değişik bir metodla bulunabilir. b_n katsayılarını veren ifade,

$$b_n = -2 \cdot \frac{2^n}{(n!)^2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right]$$

$$= -2 \cdot \frac{2^n}{(n!)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

dır. Sonuç olarak,

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n!)^2}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right] x^{n-1}$$

elde edilir.

$y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümleri aralarında lineer bağımsız olduğu için, genel çözüm,

$$y = Ay_1(x) + By_2(x)$$

dır. Burada A ve B herhangi iki keyfi sabit sayıdır ve sıfır'dan farklı tüm x değerleri için genel çözüm geçerlidir.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen fonksiyonların tekil noktalarını bulunuz.

(a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3 - 2x^2 + x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2 - 2x + 1}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

(e) $f(x) = \ln(1 + x) + \tan x$

(e) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}$

2. Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin herbiri için tekil noktaları bulunuz.

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

(b) $2x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

(c) $\left(x^3 - x\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(8x^2 - 2\right)\dfrac{dy}{dx} + 12xy = 0$

(d) $\left(x^3 + x^2\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(x^2 - 2x\right)\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(e) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^2\dfrac{dy}{dx} - y = 0$

(f) $x(2 - x)\dfrac{d^2y}{dx^2} - (2 - x)\dfrac{dy}{dx} + 4xy = 0$

(g) $\left(1 + x^2\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$

3. Aşağıdaki denklemlerin, $x_0 = 0$ noktası etrafındaki kuvvet serisi (Taylor serisi) çözümünü bulunuz. Her denklem için, genel çözümün, x 'in hangi aralıktaki değerleri için geçerli olduğunu belirleyiniz.

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - xy = 0$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - x^2y = 0$

(d) $(1+x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$

(e) $(x^2+2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+xy'+4y=0$

(f) $(x^2-2x-3)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+4y=0$

(g) $(1+4x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-8y=0$

(h) $(x^2+4)\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}-12y=0$

(ı) $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+6y=0$

(j) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+3y=0$

4. Yukarıda, 3 'üncü alıştırma 'da verilen denklemlerden ilk 5 denklemin, $x_0 = 1$ noktası etrafındaki kuvvet serisi çözümünü bulunuz. Ayrıca,

$$(x^2-2x)\frac{d^2y}{dx^2}+6(x-1)\frac{dy}{dx}+6y=0$$

denkleminin aynı nokta etrafındaki çözümünü bulunuz.

5. Başlangıç şartları birlikte verilen aşağıdaki denklemlerin $x_0 = 0$ noktası yakınındaki kuvvet serisi çözümünde, her denklem için, sıfır 'dan farklı ilk dört terimi belirleyiniz.

(a) $3\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}+(x+1)y=0\,,\qquad y(0)=0\,,\quad y'(0)=0$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

(c) $(x^2 + 4)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

(d) $(x^2 - 1)\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

6. Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin, $x_0 = 0$ noktası etrafındaki kuvvet-serisi çözümünü, Frobenius metodunu kullanarak bulunuz.

(a) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (2x^2 - 3)y = 0$

(b) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + (x^2 + 3)y = 0$

(c) $2x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

(d) $(x^2 - x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} + 12xy = 0$

(e) $3x\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x - 1)\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

(f) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (x + 1)y = 0$

(g) $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - y = 0$

(h) $2x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + xy = 0$

6-6 BESSEL DİFERANSİYEL DENKLEMİ VE ÇÖZÜMÜ

Frobenius seri metodu ile çözülebilen ikinci mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemler arasında aşağıda verilen Bessel diferansiyel denkleminin önemli bir yeri vardır. Matematiksel fizik, temel bilimler ve mühendislik bilimlerinin uğraşı alanına giren pekçok problemin çözümünde bu denklem ve denklemin çözümü olan fonksiyonlarla sık sık karşılaşılır. Bu denklemin çözümünün, çözüm fonksiyonlarının ve bunların özelliklerinin ayrıntılı olarak incelenmesi ise ancak kısmi diferansiyel denklemlerin tam olarak kavranmasından sonra mümkün olmaktadır.

Yukarıda değindiğimiz değişken katsayılı ve bir parametreli

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \left(x^2 - p^2\right) y = 0 \tag{77}$$

denklemine, ***p* 'inci mertebeden Bessel diferansiyel denklemi** denir. Burada p, herhangi bir sabit sayı, bir parametredir. Bu denklemin çözümüne de, p 'inci mertebeden **Bessel fonksiyonu** denir. Hemen ifade edelim ki biz burada p 'nin yalnız $p \geq 0$ olan reel değerlerini gözönüne alacağız ve p 'nin bu değerlerine karşılık olan (77) denkleminin çözümünü veren Bessel fonksiyonlarını bulmaya çalışacağız.

A. Sıfırıncı Mertebeden Bessel Diferansiyel Denklemi

Denk. 77 'nin çözümünde önce $p = 0$ durumunu gözönüne alalım. Bu durumda Bessel diferansiyel denklemi,

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0 \tag{78}$$

şeklini alır. Bu denkleme, **sıfırıncı mertebeden Bessel diferansiyel denklemi** denir. Açıkça görülmektedir ki, $x = 0$ noktası Denk. 78 'in bir düzgün tekil (singuler) noktasıdır. Burada, kolaylık olsun diye yalnız $x > 0$ için çözüm bulmaya çalışacağız.

Önceden biliyoruz ki, $c_0 = 0$ olmak üzere, (78) denkleminin çözümü,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = x^r \left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \right) \tag{79}$$

şeklinde bir Frobenius serisidir. Burada, r ve c_n katsayılarının belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için sıra ile y 'nin birinci ve ikinci türevleri alınır ve Denk. 78 'de yerlerine konursa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0$$

elde edilir. Yeniden düzenlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left[(n+r)(n+r-1)+(n+r)\right]x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0$$

veya

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r-1} = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$r^2 c_0 x^{r-1} + (1+r)^2 c_1 x^r + \sum_{n=2}^{\infty} (n+r)^2 c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r-1} = 0$$

veya

$$r^2 c_0 x^{r-1} + (1+r)^2 c_1 x^r + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+r)^2 c_n + c_{n-2}\right] x^{n+r-1} = 0$$

elde edilir. x'in aynı üslerinin katsayıları sıfır'a eşitlenirse,

(i) $c_0 r^2 = 0, \quad c_0 \neq 0$

(ii) $c_1 (1+r)^2 = 0$

(iii) $(n+r)^2 c_n + c_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$

bulunur. Görülüyor ki c_n katsayıları, r'nin ve n'nin fonksiyonlarıdır.

Birinci denklem indisel denklemdir. $c_0 = 0$ olması nedeniyle buradan $r^2 = 0$ veya indisel kökler $r_1 = r_2 = 0$ bulunur. İkinci eşitlikten $c_1 = 0$ elde edilir. Üçüncü eşitlik ise,

$$c_n(r) = -\frac{c_{n-2}(r)}{(n+r)^2}, \qquad n \geq 2 \tag{80}$$

katsayılar arasındaki genel bağıntıyı veren rekürans formülünü tarif eder.

Burada önce $r_1 = 0$ değeri gözönüne alınarak, bütün $c_n(r)$ değerleri hesaplanır ve bu değerler Denk. 79 'da yerlerine konularak $y_1(x)$ elde edilir. Bunun için, önce Denk. 80 'den $c_3 = c_5 = c_7 = \ldots = c_{2n+1} = 0$ bulunur. Bu demektir ki, bütün tek indisli katsayılar "sıfır" dır. Bu durumda, Denk. 80 tekrar yazılırsa,

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n^2}, \qquad n = 2, 4, 6, 8, \ldots,$$

veya $n = 2m$ alınarak,

$$c_{2m} = -\frac{c_{2m-2}}{(2m)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

olur. Buradan,

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{(2.2)^2} = \frac{c_0}{(2.2)^2 . 2^2} = \frac{c_0}{2^4 . 2^2}$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{(2.3)^2} = -\frac{c_0}{(2.3)^2 . 2^4 . 2^2} = -\frac{c_0}{2^6 (2.3)^2}$$

$$c_8 = -\frac{c_6}{(2.4)^2} = \frac{c_0}{(2.4)^2 . 2^6 . (2.3)^2} = \frac{c_0}{2^8 (2.3.4)^2}$$

$$\vdots$$

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

bulunur. Bütün bu değerler Denk. 79 'da yerlerine konursa,

$$y_1(x) = c_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} \right], \qquad x > 0 \tag{81}$$

elde edilir. Böylece (78) denkleminin birinci çözümü bulunmuş olur. Burada, köşeli parantez içinde kalan fonksiyon $J_0(x)$ ile gösterilirse,

$$J_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \tag{82}$$

olur. Bu şekilde tarif edilen $J_0(x)$ fonksiyonuna, **sıfırıncı mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu** denir.

Açıkça görülüyor ki, (78) denkleminin çözümü olan $J_0(x)$ fonksiyonu, $x = 0$ noktasında analitiktir ve x'in bütün değerleri için (82) serisi yakınsaktır.

Önceden biliyoruz ki, $r_1 = r_2$ olduğu zaman (78) denklemi şeklinde değişken katsayılı bir diferansiyel denklemin, $c_0 = 1$ özel değeri için, birbirinden lineer bağımsız iki çözümü,

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_1)\, x^n\right]$$

ve

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{r_2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)\, x^n \qquad (83)$$

dır. $c_0 = 1$ için $y_1(x) = J_0(x)$ olduğuna göre, şimdi amacımız ikinci çözüm $y_2(x)$ fonksiyonunu bulmaktır. Burada problem $a_n(r_1)$'ın bulunmasıdır.

$a_n(r_1)$'in değerlerini bulmak için birkaç yöntem izlenebilir. Bunlardan birisi, (83) denklemi ile ifade edilen $y_2(x)$ fonksiyonunun doğrudan Denk. 78 'de yerine konması ve buradan $a_n(r_1)$'in bulunmasıdır. İkinci yol, $c'_n(r_1) = dc_n/dr$ değerini hesaplamak ve $a_n(r_1) = c'_n(r_1)$ olmasından yararlanmaktır. Bunun için önce yukarıda bulunan (ii) numaralı $(1 + r)^2\, c_1(r) = 0$ bağıntısını tekrar gözönüne alalım. Burada $r_1 = 0$ için $c_1(0) = 0$ ve $c'_1(0) = 0$ olduğu gözönünde tutularak, (80) numaralı rekürans formülünden,

$$c'_3(0) = c'_5(0) = \ldots = c'_{2n+1}(0) = 0$$

olduğu açıkça görülmektedir. Geriye kalan çift indisli katsayıların birinci türevleri ise aşağıdaki şekilde bulunur. Bunun için önce (80) numaralı rekürans formülü, $n = 2m$ alınarak tekrar yazılırsa,

$$c_{2m} = -\frac{c_{2m-2}}{(2m + r)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

olur. Buradan,

$$c_2 = -\frac{c_0}{(2 + r)^2}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{(4 + r)^2} = \frac{c_0}{(4 + r)^2(2 + r)^2}$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{(6+r)^2} = -\frac{c_0}{(6+r)^2(4+r)^2(2+r)^2}$$

$$\vdots$$

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{(2m+r)^2(2m-2+r)^2 \ldots (4+r)^2(2+r)^2}$$

bulunur.

(84) numaralı rekürans formülünden $c'_{2m}(0)$ 'ın değerini bulabilmek için önce c'_{2m}/c_{2m} değerini bulalım.

$$\frac{c'_{2m}}{c_{2m}} = -2\left(\frac{1}{2m+r} + \frac{1}{2m-2+r} + \ldots + \frac{1}{4+r} + \frac{1}{2+r}\right)$$

Burada $r = 0$ konursa

$$c'_{2m}(0) = -2\left(\frac{1}{2m} + \frac{1}{2(m-1)} + \frac{1}{2(m-2)} + \ldots + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) c_{2m}(0)$$

elde edilir. $c_{2m}(0)$ aynen c_0 gibi keyfi bir sabit sayı olduğundan bu katsayı yerine,

$$c_{2m}(0) = \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m}(m!)^2}$$

değeri yazılırsa,

$$c'_{2m}(0) = -\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right) \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m}(m!)}$$

elde edilir. Burada,

$$H_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \ldots + \frac{1}{2} + 1$$

ile gösterilirse,

$$c'_{2m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{85}$$

bulunur. Yukarıda değindiğimiz gibi, $a_n(0) = c'_n(0) = c'_{2m}(0)$ olduğundan, Denk. 83 'de $a_n(0)$ yerine $c'_{2m}(0)$ 'ın bulunan bu değeri konulabilir. Bu durumda Denk. 85'de c_0 yerine $c_0 = 1$ özel değeri alınırsa,

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}, \qquad x > 0 \tag{86}$$

bulunur.

Hemen işaret edelim ki, $c_0 = 1$ için bulunan $y_1(x) = J_0(x)$ fonksiyonu, (78) denkleminin bir çözümü olduğu halde, burada (86) denklemi ile tarif edilen $y_2(x)$ fonksiyonu, $J_0(x)$ ile lineer bağımsız olmadığından, Denk. 78 'in aranan kinci çözümü değildir. Buna karşılık, $J_0(x)$ ile $y_2(x)$ 'ın bir lineer kombinasyonu olan ve aşağıdaki şekilde tarif edilen

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[y_2(x) + \left(\gamma - \ln 2\right) J_0(x)\right] \tag{87}$$

fonksiyonu, diferansiyel denklemin aranan ikinci çözümüdür. Denk. 87 'de $y_2(x)$ yerine, (86) denklemindeki değeri yazılırsa,

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}\right] \tag{88}$$

elde edilir. Burada γ 'ya Euler sabiti denir ve değeri,

$$\gamma = \lim_{m\to\infty} \left(H_m - \ln m\right) \cong 0{,}57721566..$$

dir.

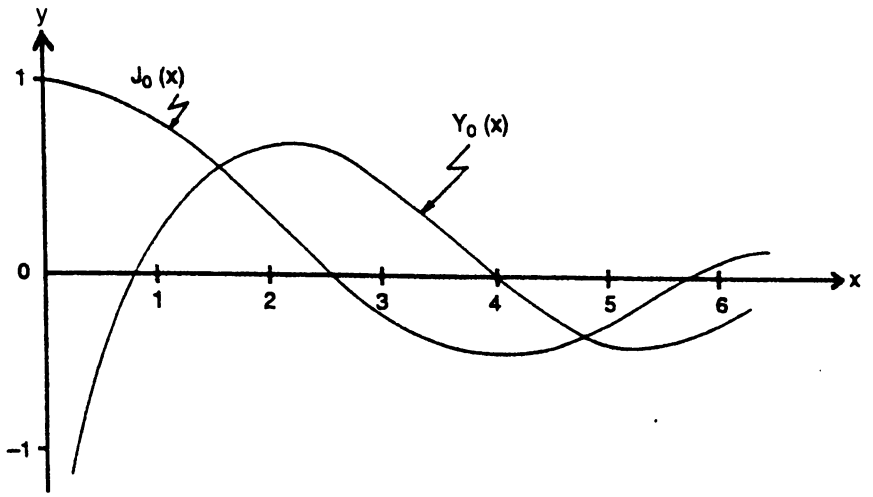
$c_0 = 1$ özel değeri için, Denk. 78 'in bir çözümü olan $Y_0(x)$ fonksiyonuna, **sıfırıncı mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu** denir. Böylece, (78) numaralı Bessel denkleminin genel çözümü

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$$

bulunmuş olur. Burada C_1 ve C_2 herhangi iki keyfi sabit sayıdır.

$J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ fonksiyonlarının özellikleri ayrıntılı şekilde bilinmektedir. $x > 0$ için bu fonksiyonların x'e bağlı değerleri Appendix 'de verildiği şekilde, literatürde çizelgeler halinde verilir.

Bu değerlerden yararlanarak, $J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ fonksiyonlarının grafikleri birlikte aşağıda Şekil. 1 'de verilmiştir.



Şekil 1

B. p 'inci Mertebeden Bessel Diferansiyel Denklemi

Şimdi, $x > 0$ değerleri için p 'inci mertebeden Bessel denkleminin çözümünü bulmaya çalışacağız. Burada p, sıfır 'dan farklı ve pozitif bir sayıdır.

Önce, (77) numaralı Bessel diferansiyel denklemini tekrar yazalım.

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \left(x^2 - p^2\right) y = 0$$

Biliyoruz ki, bu denklemin çözümü,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

şeklinde bir fonksiyondur. y 'nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)\, x^{n+r-1} \quad \text{ve} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1)\, x^{n+r-2}$$

bulunur. y ve türevleri diferansiyel denklemde yerlerine konursa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (r+n+p)\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{r+n+2} = 0$$

olur. Burada, x 'ın aynı üslerinin katsayıları sıfır 'a eşitlenirse,

(i) $c_0 (r + p) (r - p) = 0$, $c_0 = 0$

(ii) $c_1 (r + 1 + p) (r + 1 - p) = 0$

(iii) $c_n (r + n + p) (r + n - p) + c_{n-2} = 0$, $n \geq 2$

elde edilir. Buradan, $r_1 = p$, $r_2 = -p$ ve $c_1 = 0$ bulunur. Üçüncü denklemde $r = r_1 = p$ yazılırsa,

$$c_n = - \frac{c_{n-2}}{n (n + 2p)} , \qquad n \geq 2 \tag{90}$$

elde edilir. Görülüyor ki, $c_1 = 0$ olduğundan, bütün tek indisli katsayılar sıfır 'dır. Çift indisli katsayılar ise, (90) numaralı rekürans formülünden aşağıdaki şekilde kolayca elde edilir.

$$c_2 = - \frac{c_0}{2 (2 + 2p)} = - \frac{c_0}{2^2 (1 + p)}$$

$$c_4 = - \frac{c_2}{4 (4 + 2p)} = \frac{c_0}{2^4 . 2! (1 + p) (2 + p)}$$

$$c_6 = - \frac{c_4}{6 (6 + 2p)} = - \frac{c_0}{2^6 . 3! (1 + p) (2 + p) (3 + p)}$$

$$\vdots$$

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{[2 . 4 \ldots (2m)][(2 + 2p) (4 + 2p) \ldots (2m + 2p)]}$$

$$= \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m} m! [(1 + p) (2 + p) \ldots (m + p)]} , \qquad m = 1, 2, 3 \ldots$$

Böylece, $r_1 = p$ köküne karşılık olan $y_1 (x)$ çözümü,

$$y_1(x) = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p}}{2^{2m} m! [(1 + p) (2 + p) \ldots (m + p)]} \tag{91}$$

Denk. 91 'de $p = 0$ ve $c_0 = 1$ alınırsa, beklendiği üzere $y_1 (x)$ fonksiyonu doğrudan $J_0 (x)$ fonksiyonunu verir.

$y_1(x)$ çözümü, Denk. (91) 'de verildiği şekilde ifade edildiği gibi, ayrıca **gamma fonksiyonları** kullanılarak daha kompakt ve alışılmış şekli ile aşağıdaki gibi de verilir. Bunun için önce gamma fonksiyonları hakkında bildiklerimizi hatırlamakta yarar vardır. Tarif olarak,

$$\Gamma(p) = \int e^{-t}\, t^{p-1}\, dt \qquad (92)$$

dır. Burada p yerine $p+1$ yazılırsa,

$$\Gamma(p+1) = \int e^{-t}\, t^{p}\, dt$$

$$= \left[-e^{-t}\, t^{p}\right] - \int (pt^{p-1})\,(-e^{-t})\, dt$$

olur. $\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t}t^{p}\right) = 0$ ve $\lim_{t\to 0}\left(e^{-t}t^{p}\right) = 0$, $(p > 0)$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\Gamma(p+1) = p\ \Gamma(p) \qquad (93)$$

bağıntısı elde edilir. Aynı şekilde,

$$(p+1)\,\Gamma(p+1) = (p+2)$$

$$(p+2)(p+1)\,\Gamma(p+1) = (p+3)$$

$$(p+3)(p+2)(p+1)\,\Gamma(p+1) = \Gamma(p+4)$$

$$\vdots$$

$$(p+n)(p+n-1)\ldots(p+2)(p+1)\,\Gamma(p+1) = \Gamma(p+n+1) \qquad (94)$$

elde edilir.

Denk. 92 'de, $p = 1$ alınırsa,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = 1$$

bulunur. (93) numaralı bağıntı yardımıyla,

$$\Gamma(2) = 1\ \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\ \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\ \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

bulunur. Buradan p pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$\Gamma(p+1) = p!$$

bağıntısı elde edilir.

Ayrıca $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğu görülebilir.

Bu eşitliği Gamma fonksiyonunun tanımından hareketle göstermek mümkündür.

Şimdi, (91) numaralı denkleme geri dönelim. Yukarıda görülen (94) ve (95) numaralı bağıntıları kullanarak ve ayrıca c_0 için,

$$c_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$$

olduğu kabul edilerek, $y_1(x)$ çözümünü değişik şekli ile bulmaya çalışalım. Önce $y_1(x)$ 'i yukarıda verildiği şekli ile yeniden yazalım.

$$y_1(x) = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{p+2m}}{2^{2m} m!\,(p+1)(p+2)\ldots(p+m-1)(p+m)}$$

Burada, yukarıda olduğu gibi, $c_0 = 1$ özel değeri için $y_1(x)$ fonksiyonu genel olarak $J_p(x)$ ile gösterilir. O zaman,

$$J_p(x) = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{p+2m}}{2^{2m} m!\,(p+1)(p+2)\ldots(p+m-1)(p+m)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}$$

veya

$$J_p(x) = \frac{1}{2^p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{p+2m}}{2^{2m} m!\,\Gamma(p+m+1)}$$

$$= \frac{1}{2^p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{p+2m}}{2^{2m} m!\,(p+m)!}$$ olur. Yeniden düzenlenirse,

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} \qquad (96)$$

elde edilir. $J_p(x)$ fonksiyonuna p 'inci mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu adı verilir. Burada açıkça ifade edelim ki, bütün $p \geq 0$ değerleri için (96) denklemi ile verilen $J_p(x)$ fonksiyonu, (77) denkleminin bir çözümüdür. Bu çözümle lineer bağımsız olan ikinci çözüm, p 'nin değerlerine bağlı olarak değişir.

Eğer p, "sıfır" dan farklı ise ve aynı zamanda pozitif bir tam sayı değilse, o zaman diferansiyel denklemin $r_2 = -p$ 'ye karşılık olan ikinci çözümü, (96) denkleminde p yerine $-p$ koymak suretiyle kolayca bulunur. Bu çözüm $J_{-p}(x)$ ile gösterilir ve değeri

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m-p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p} \tag{97}$$

olur.

$J_p(x)$ ve $J_{-p}(x)$ fonksiyonları aralarında lineer bağımsız olan iki ayrı çözüm olduğundan, p 'nin yukarıda belirtilen değerleri için, (77) denkleminin genel çözümü,

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x) \tag{98}$$

olur. Burada C_1 ve C_2 iki keyfi sabit sayıdır.

Eğer, p herhangi bir pozitif tam sayı ise, o zaman $J_{-p}(x)$ fonksiyonunun $J_p(x)$ ile orantılı olduğu kolayca görülür. Bu durumda $J_p(x)$ ve $J_{-p}(x)$ fonksiyonları aralarında lineer bağımsız olmadığından $J_{-p}(x)$ yeni bir çözüm değildir. O zaman, önceden gördüğümüz metodlardan birini kullanarak, Denk. 96 ile verilen $J_p(x)$ fonksiyonu ile lineer bağımsız olan ikinci çözüm bulunabilir. ***p* 'inci mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu** adı verilen bu fonksiyonunun bulunması işi okuyucuya bırakılmış olup sonuç aşağıda verilmiştir.

$$Y_p(x) = \frac{2}{\pi} J_p(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(p-m-1)!}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p}$$

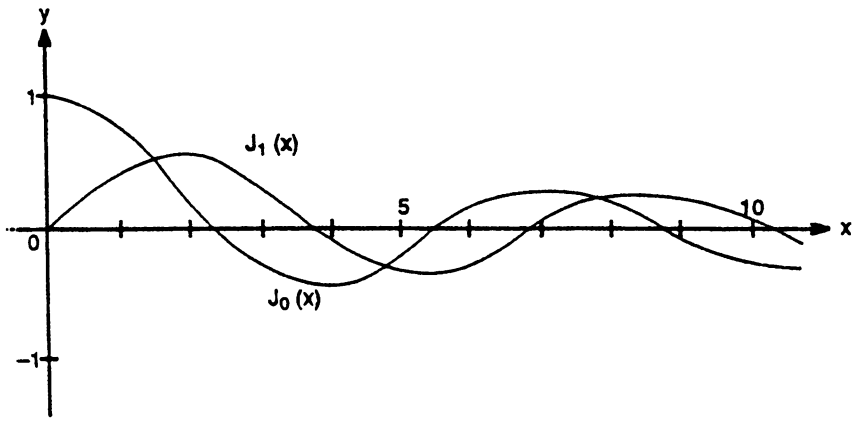
$$- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(p+m)!} \left(\sum_{k=1}^{p+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \right) \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}$$

Böylece, p herhangi bir pozitif tam sayı olduğu zaman (77) denkleminin genel çözümü,

$$y = AJ_p(x) + BY_p(x) \tag{99}$$

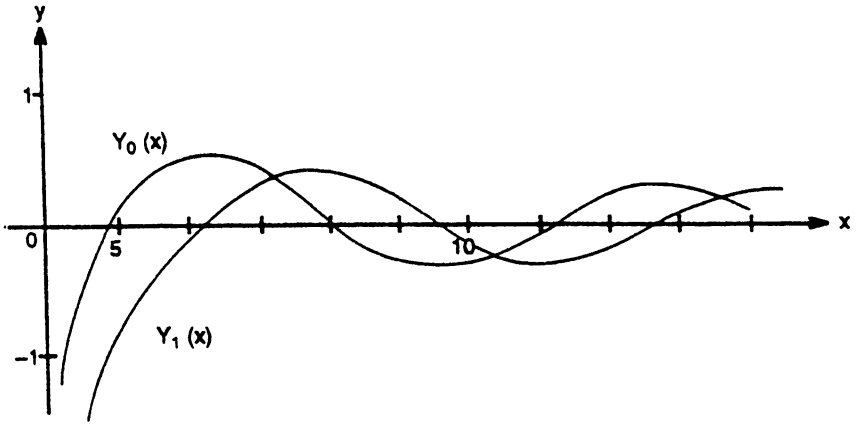
olur. Burada A ve B herhangi iki keyfi sabit sayıdır.

Bir uygulama olmak üzere $J_0(x)$ ve $J_1(x)$ fonksiyonlarının grafikleri ile $Y_0(x)$ ve $Y_1(x)$ fonksiyonlarının grafikleri



Şekil 2

sıra ile, Şekil 2 ve Şekil 3 'de birlikte verilmiş bulunmaktadır.



Şekil 3

Yukarıda verilen $J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ fonksiyonlarının grafiklerine yakından bakacak olursak, görürüz ki, x 'in büyük değerleri için bu eğriler sönümlü kosinüs ve sinüs eğrilerini andırmaktadır. Diğer taraftan, $y'' + y = 0$ denkleminin çözümleri $\cos x$ ve $\sin x$ olduğundan, (78) denkleminin

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2} \right) y = 0$$

şeklinde yazılması durumunda, x 'in büyük değerleri için (78) denkleminin, $y'' + y = 0$ denklemine nasıl yaklaştığı ve bu eğrilerin de, sinüs ve kosinüs eğrilerine nasıl yaklaştığı açıkça görülmektedir.

C. Değişik Mertebelerden Bessel Fonksiyonları Arasında Bağıntılar

Bessel fonksiyonları arasında değişik rekürans formülleri vardır. Bunlar kısaca aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

fonksiyonu, x 'in herdeğeri için yakınsak olduğundan, türevi alınırsa,

$$J_p'(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+p)}{m!\,(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m-1}$$

elde edilir.

$$x J_p'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+p)}{m!\,\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}$$

$$= p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m} + \sum_{m=1}^{\infty} 2m \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}$$

$$= p J_p(x) + x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)!\,\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m-1}$$

$$= p J_p(x) + x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!\,\Gamma(p+m+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m+1}$$

Buradan,

(i) $xJ_p'(x) = pJ_p(x) - xJ_{p+1}(x)$

elde edilir. Benzer şekilde,

(ii) $xJ_p'(x) = -pJ_p(x) + xJ_{p-1}(x)$

(iii) $J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x)$

(iv) $J_p'(x) = \frac{1}{2}(J_{p-1} - J_{p+1})$

elde edilir. Bu formüller $Y_p(x)$ için de doğrudur.

Bu formüllerin ne kadar faydalı olduğunu anlamak için, (iii) numaralı formülde $p = 1$ konursa,

$$J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)$$

elde edilir. Eğer J_0 ve J_1 fonksiyonları biliniyorsa, $J_2(x)$ ve aynı şekilde, n herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere, $J_n(x)$ bulunabilir. J_0 ve J_1 değerleri ise literatürde çizelgeler halinde verilmektedir.

Denk. 96 ve yukarıda verilen rekürans formülleri yardımı ile, pozitif tam sayı olmayan değişik p değerlerine karşılık olan Bessel fonksiyonları da aynı şekilde kolayca yazılabilir. Örneğin, $p = 1/2$ için,

$$J_{1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}\,\Gamma(m)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)} x^{2m}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\Gamma(m + 3/2) = \Gamma(3/2)\left[\frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{2^m}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{2^m}\right]$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m m!\,3.5\ldots(2m+1)} x^{2m}$$

$$= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

veya

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

bulunur.

Yukarıda verilen (iii) numaralı formülü gözönüne alınırsa,

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right)$$

ve aynı şekilde,

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3 \sin x}{x^2} - \frac{3 \cos x}{x} - \sin x \right)$$

bulunur.

6-7 BESSEL DENKLEMİNE İNDİRGENEBİLEN DENKLEMLER

Yukarıda verilen (77) numaralı Bessel diferansiyel denklemine indirgenebilen ve çözümleri Bessel fonksiyonları cinsinden ifade edilebilen bazı diferansiyel denklemler ve çözümleri aşağıda özet olarak ele alınmış bulunmaktadır. Örnek olarak,

$$x^2 y'' + x(a + 2bx^p) y' + [c + dx^{2q} + b(a + p - 1)x^p + b^2 x^{2p}] y = 0 \qquad (100)$$

denklemini ele alalım. Bazı şartlar altında bu denklemin Bessel diferansiyel denklemine indirgenmesi ve bilinen yöntemler yardımıyla genel çözümün bulunması mümkündür. Bu şartlar (Kural - 1).

$$(1 - a)^2 \geq 4c \qquad \text{ve} \qquad d \neq 0, \qquad p \neq 0, \qquad q \neq 0$$

ve denklemin genel çözümünü,

$$y(x) = x^{\alpha} e^{-(b/p)x^p} [C_1 J_n(\lambda x^q) + C_2 Y_n(\lambda x^q)]$$

bulunur. Burada,

$$\alpha = \frac{1 - a}{2}, \quad \beta = \frac{b}{p}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{|d|}}{q}, \quad m = \frac{\sqrt{(1 - a)^2 - 4c}}{2q} \quad \text{dır.}$$

Eğer $d < 0$ ise J_n yerine I_n ve Y_n yerine K_n kullanmak adettir. İkinci bir kural (Kural - 2) olarak eğer, $(1-r)^2 \geq 4b$, $a \neq 0$ ve $s > r - 2$ veya $b = 0$ koşulları geçerli ise, aşağıda verilen denklem

$$\frac{d}{dx}\left(x^r \frac{dy}{dx}\right) + \left(ax^5 + bx^{r-2}\right) y = 0$$

Bessel diferansiyel denklemine indirgenebilir ve genel çözümü;

$$y(x) = x^{\alpha}\left[C_1 J_n(\lambda x^{\gamma}) + C_2 Y_n(\lambda x^{\gamma})\right]$$

bulunur. Burada,

$$\alpha = \frac{1-r}{2}, \quad \beta = \frac{2-r+s}{2}, \quad \lambda = \frac{2\sqrt{|a|}}{2-r+s}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{(1-r)^2 - 4b}}{2-r+s}$$

elde edilir. Eğer, $a < 0$ ise, J_n yerine I_n ve Y_n yerine K_n konulur. Ayrıca, n tam sayı değilse, istenildiği taktirde Y_n yerine J_{-n} ve K_n yerine I_{-n} kullanılabilir.

Örnek 1. $x^2y'' + x(4x^4 - 3)y' + (4x^8 - 5x^2 + 3)y = 0$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Yukarıda verilen Denk. 100 ile ilgili kurallar bu denklem için aynen geçerlidir ve şu değerleri almaktadır:

$$a = -3, \quad b = 2, \quad p = 4, \quad c = 3, \quad d = -5, \quad q = 1$$

ve

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1/2, \quad \lambda = \sqrt{|-5|} = \sqrt{5}, \quad n = 1$$

Buna göre, genel çözüm

$$y(x) = x^2 e^{-x^4/2}\left[C_1 J_1(\sqrt{5}\,x) + C_2 K_1(\sqrt{5}\,x)\right]$$

bulunur.

Örnek 2. $y'' + y = 0$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Bu denklemin genel çözümünün,

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

olduğunu biliyoruz. Ancak, adı geçen diferansiyel denklem Kural 2 'nin özel bir uygulamasıdır. Sabit değerler,

$$r = 0, \quad s = 0, \quad a = 1, \quad b = 0$$

ve

$$\alpha = 1/2, \qquad r = 1, \qquad \lambda = 1 \qquad \text{ve} \qquad n = 1/2$$

olduğuna göre, denklemin genel çözümü

$$y(x) = d_1 \sqrt{x}\, J_{1/2}(x) + d_2 \sqrt{x}\, J_{-1/2}(x)$$

bulunur. Burada d_1 ve d_2 herhangi iki keyfi sabit sayıdır. Aynı denklem için değişik görünüm altında bulunan her iki genel çözüm şüphesiz aynıdır.

6-8 LEGENDRE DENKLEMİ VE LEGENDRE POLİNOMLARI

Bessel diferansiyel denkleminden sonra, ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemler arasında,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)\, y = 0 \tag{101}$$

denkleminin özel bir yeri vardır. Bu denkleme, p 'inci mertebeden **Legendre denklemi** denir. Burada p, herhangibir pozitif reel sayıdır.

(101) denklemini aşağıdaki şekilde tekrar yazalım.

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}\, y' + \frac{p(p + 1)}{1 - x^2}\, y = 0$$

Açıkça görülüyor ki, burada $x = \pm 1$ noktaları düzgün tekil noktalardır. Ayrıca, $s = 1/x$ dönüşümü yapılırsa, (101) denkleminin

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \left[\frac{2}{s} - \frac{2}{s\left(s^2 - 1\right)}\right]\frac{dy}{ds} + \frac{p(p + 1)}{s^2\left(s^2 - 1\right)}\, y = 0$$

şekline sokulabilmesinden anlaşılacağı üzere, diferansiyel denklem sonsuzda da bir düzgün singüleriteye sahiptir. Öyle ise bu noktalar dışında,

$$P_1(x) = -\frac{2x}{1 - x^2} \qquad \text{ve} \qquad P_2(x) = \frac{p(p + 1)}{1 - x^2}$$

fonksiyonları analitik fonksiyonlardır. Bu nedenle, $x = 0$ noktası komşuluğunda, $|x| < 1$ aralığında (101) denkleminin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{102}$$

şeklinde bir seri çözümü bulunabilir. y, y' ve y'' değerleri Denk. 101 'de yerlerine konursa,

$$(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

veya

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)c_n x^n = 0$$

olur. İndislerle ilgili düzenleme yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)c_n x^n = 0$$

veya

$$2c_2 + p(p+1)c_0 + [3 \cdot 2c_3 + (p+2)(p-1)c_1]x$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ (n+2)(n+1)c_{n+2} + [p(p+1) - n(n+1)]c_n \right\} x^n = 0$$

elde edilir. Buradan,

(i) $2c_2 + p(p+1)c_0 = 0$

(ii) $3.2c_3 + (p+2)(p-1)c_1 = 0$

(iii) $(n+2)(n+1)c_{n+2} + (p+n+1)(p-n)c_n = 0, \qquad n \geq 2$

yazılır. $c_0 \neq 0$ olduğu gözönünde tutularak, ilk iki bağıntıdan,

$$c_2 = -\frac{p(p+1)}{2!}c_0 \quad \text{ve} \quad c_3 = -\frac{(p+2)(p-1)}{3!}c_1$$

bulunur. Üçüncü bağıntı,

$$c_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+2)(n+1)}c_n, \qquad n \geq 2 \tag{103}$$

rekürans formülünü verir. Geri kalan katsayılar bu formül yardımıyla c_0, c_1 keyfi sabitleri cinsinden bulunur. Böylece, $x < 1$ aralığında p 'inci mertebeden Legendre denklemi 'nin genel çözümü,

$$y = c_0\left[1 - \frac{(p+1)\,p}{2!}x^2 + \frac{(p+3)(p+1)(p-2)}{4!}x^4 - \frac{(p+5)(p+3)(p+1)\,p\,(p-2)(p-4)}{6!}x^6 + \ldots\right]$$

$$+ c_1\left[x - \frac{(p+2)(p-1)}{3!}x^3 + \frac{(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)}{5!}x^5 - \ldots\right]$$

elde edilir. Lineer bağımsız çözümlerin herbiri daha kısa olarak,

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(p+2n-1)(p+2n-3)\ldots(p+1)\,p\,(p-2)\ldots(p-2n+2)}{(2n)!}x^{2n}$$

ve

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1} \frac{(p+2n)(p+2n-2)\ldots(p+2)(p-1)\ldots(p-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

şeklinde yazılır. Burada, toplama işareti içinde görülen serilerin herbiri $x < 1$ aralığında yakınsak ve $x > 1$ aralığında ise ıraksaktır. İspatlanması kolay olmamakla beraber $x = \pm 1$ noktalarında da bu seriler ıraksaktır.

Şimdi, (103) numaralı rekürans formülünü tekrar gözönüne alalım. Burada, $n = p - 2$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$c_{p-2} = -\frac{p\,(p-1)}{2\,(2p-1)}\,c_p$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$c_{p-4} = \frac{(p-2)(p-3)}{4\,(2p-3)}\,c_{p-2}$$

$$= \frac{n\,(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4\,(2n-1)(2n-3)}\,c_p$$

olur. Öyle ise, $p = 0$ veya herhangi bir pozitif tam sayı ise, Legendre diferansiyel denkleminin bir özel çözümü,

$$y = c_p\left[x^p - \frac{p\,(p-1)}{2\,(2p-1)}x^{p-2} + \frac{p\,(p-1)(p-2)(p-3)}{2.4\,(2p-1)(2p-3)}x^{p-4} - \ldots\right] \qquad (105)$$

olur. Burada açıkça görülüyor ki, p'ye bağlı olarak parantez içinde x'ın üssü sıfır olduğunda serinin son terimi elde edilmiş oluyor; başka bir deyişle seri birçok terimliye dönüşüyor.

c_p'nin herhangi bir keyfi sabite olduğu düşünülürse,

$$c_p = \frac{(2p)!}{2^p (p!)^2} = \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 1}{p!}, \qquad p = 1, 2, 3 \ldots$$

seçilmesi halinde, ki bu durumda $c_0 = 1$ olur. (105) denklemi ile tarif edilen polinomlara **Legendre polinomları** denir ve aşağıda ifade edildiği şekilde $P_p(x)$ ile gösterilir. $P_0(x) = 1$ olduğu gözönünde tutularak,

$$P_p(x) = \frac{(2p)!}{2^p (p!)^2}\left[x^p - \frac{p(p-1)}{2(2p-1)}x^{p-2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2 \cdot 4 (2p-1)(2p-3)}x^{p-4} - \ldots\right], \qquad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{106}$$

yazılır. Denk. 106 'dan yararlanarak, herbiri Legendre denkleminin bir çözümü olan ilk birkaç Legendre polinomu aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

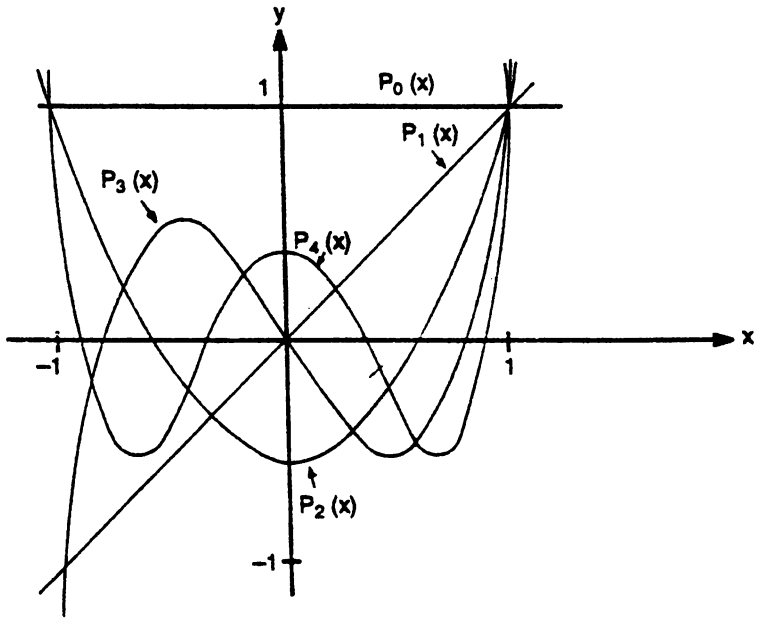
$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$$

Bu polinomların ilk dördünün grafikleri aşağıda Şekil 3 'de gösterilmiştir. Diğer Legendre polinomlarının grafiklerinin çizimi ise okuyucuya bırakılmıştır.



Şekil 4

(106) denklemi ile tarif edilen Legendre polinomları, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ ve $P_1(1) = 1$ olduğu gözönünde tutularak,

$$P_{p+1}(x) = \frac{2p+1}{p+1} \times P_p(x) - \frac{p}{p+1} P_{p-1}(x) \qquad (107)$$

rekürans formülü yardımıyla kolayca bulunabilir. Bu formülün ispatı burada yapılmıyacaktır.

Legendre polinomları, Rodrigues formülü adı verilen bir formül yardımıyla da kısaca,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n \qquad (108)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada p yerine n kullanılmıştır. Bu formülün ispatı, Legendre polinomlarının, Legendre denkleminin çözümü olduğunu ispatlamak suretiyle yapılır. Bunun için önce,

$$u(x) = (x^2 - 1)^n \qquad (109)$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. (109) denkleminin türevi alınırsa,

$u' = 2nx\,(x^2 - 1)^{n-1}$ veya

$$(x^2 - 1)u' - 2nxu = 0$$

elde edilir. Arka arkaya türev alınmasına devam edilirse,

$$(x^2 - 1)u'' - 2x\,(n-1)u' - 2nu = 0$$

$$\vdots$$

$$(x^2 - 1)u^{(k+2)} - 2x\,[n-(k+1)]\,u^{(k+1)}$$
$$-2\,[n + (n-1) + \ldots + (n-k)]\,u^{(k)} = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$n + (n-1) + \ldots + (n-k) = \frac{(2n-k)\,(k+1)}{2}$$

olduğundan,

$$(x^2 - 1)u^{(k+1)} - 2x\,[n-(k+1)]\,u^{(k+1)} - (2n-k)\,(k+1)\,u^{(k)} = 0$$

olur. Burada $k = n$ yazılır ve her terim $-1/(2^n n!)$ ile çarpılırsa,

$$(1 - x^2)\frac{u^{(n+2)}}{2^n n!} - 2x\frac{u^{(n+1)}}{2^n n!} + n\,(n+1)\frac{u^{(n)}}{2^n n!} = 0 \qquad (110)$$

elde edilir. Denk. 110 'da,

$$P_n(x) = \frac{u^n}{2^n n!} = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n \qquad (111)$$

yazılırsa,

$$(1 - x^2)\,P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n\,(n+1)\,P_n(x) = 0 \qquad (112)$$

olur. Denk. 112, beklenilen bir sonuçtur. Rodrigues formülü adı verilen Denk. 111 yardımıyla tarif edilen $P_n(x)$ polinomları, Legendre denkleminin birer çözümüdür.

Legendre polinomlarının değişik özellikleri vardır. Bunlardan en önemlisi, $-1 \le x \le +1$ aralığında "ortogonal" oluşlarıdır. Polinomların bu özelliğini ispatlayabilmek için, Legendre denklemi önce,

$$[(1 - x^2)y']' = -p\,(p+1)y$$

şeklinde yazalım. Burada y yerine $P_n(x)$ veya $P_m(x)$ yazacak olursak, n ve m pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$(1 - x^2)\,P_n'(x) = -n\,(n+1)\,P_n(x)$$

veya

$$\left[(1-x^2)\,P_m'(x)\right]' = -m\,(m+1)\,P_m(x)$$

yazılır. Buradan,

$$(1-x^2)\,P_m'' - 2xP_m' + m\,(m+1)P_m = 0$$

$$(1-x^2)\,P_n'' - 2xP_n' + n\,(n+1)P_n = 0$$

bulunur. Birinci denklem $-P_n$ ile ve ikincisi P_m ile çarpılır toplanırsa,

$$(1-x^2)\,(P_m P_n'' - P_m'' P_n) - 2x\,(P_m P_n' - P_m' P_n)$$

$$= \left[m\,(m+1) - n\,(n+1)\right] P_m\, P_n \qquad (113)$$

elde edilir. Denk. 113, aşağıdaki şekilde yazılırsa,

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,(P_m P_n' - P_m' P_n)\right] = \left[m\,(m+1) - n\,(n+1)\right] P_m P_n$$

ve -1 den $+1$ 'e kadar integrali alınırsa,

$$\left[m\,(m+1) - n\,(n+1)\right] \int_{-1}^{+1} P_m P_n\, dx = 0$$

elde edilir. $m \neq n$ için,

$$\int_{-1}^{+1} P_m P_n\, dx = 0 \qquad (114)$$

bulunur. Böylece, Legendre polinomlarının, ortogonal polinomlar olduğu ispatlanmış olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Birinci mertebe birinci tür Bessel fonksiyonunun

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m}}{2^{2m}\,(m+1)!\,m!}$$

şeklinde ifade edildiğini gösteriniz.

2. $p = 1/2$ 'inci mertebeden,

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0\,, \qquad x > 0$$

Bessel denkleminin, $y = x^{-1/2}\, v(x)$ değişken değiştirmesi ile

$$v'' + v = 0$$

denklemine dönüşeceğini ve böylece $p = 1/2$ inci mertebeden Bessel denkleminin genel çözümünün

$y = Ax^{-1/2} \cos x + Bx^{-1/2} \sin x$

olduğunu gösteriniz.

3. $\frac{d}{dx}\left[x^{-p} J_p(x)\right] = -x^{-p} J_{p+1}(x)$

olduğunu gösteriniz.

4. $J_0'(x) = -J_1(x)$ olduğunu gösteriniz.

5. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ve $\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$ olduğunu gösteriniz.

6. $x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - p^2)y = 0$ denkleminde k bir pozitif sayıdır. $J_p(kx)$ 'ın bu denklemin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

7. Eğer n bir pozitif tam sayı ise,

$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

olduğunu gösteriniz.

8. $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$ olduğunu gösteriniz.

9. $J_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin x + \frac{1}{x}\cos x\right)$

olduğunu gösteriniz.

10. $4y'' + 9xy = 0$ denklemi, $y = \sqrt{x}\,Y$ ve $x = X^{2/3}$ değişken değiştirmesi yapılarak Bessel denklemi şekline sokulabilir. Bu denklemin bir çözümünün,

$y\sqrt{x}\, J_{1/3}\left(x^{3/2}\right)$

olduğunu gösteriniz.

11. $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$ Bessel denkleminin bir çözümü olan $J_0(x)$ polinomunun birinci türevi $J_0'(x)$ 'ın , $p = 1$ için genel Bessel diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

12. $$\exp\left\{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n(x)\, t^n$$

olduğunu gösteriniz.

13. Herhangi bir Legendre polinomu için,

$P_p(1) = 1$

olduğunu gösteriniz.

14. $P_p(-x) = (-1)^p P_p(x)$ olduğunu ve dolayısıyla $P_p(-1) = (-1)^p$ olduğunu gösteriniz.

15. $x^p = \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) + \ldots + \alpha_p P_p(x)$

eşitliğini sağlayan α_0 , α_1 , ... , α_p gibi sabit sayıların bulunabildiğini gösteriniz.

(Yol gösterme: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, ..., v.s. olduğunu gözönüne alınız.)

16. $u = (x^2 - 1)^n$ ve $u^{(n)}$, u 'nun n 'inci türevi olsun. Buna göre,

a) Kısmi integrasyon metodu ile,

$$u^{(n)} u^{(n)} dx = (2n!) \int_{-1}^{+1} (1 - x)^n (1 + x)^n dx$$

olduğunu ispatlayınız.

b) $$\int_{-1}^{+1} (1 - x)^n (1 + x)^n dx = \frac{(n!)^2}{(2n!)(2n + 1)} 2^{2n+1}$$

olduğunu ispatlayınız.

c) $\int_{-1}^{+1} [P_p(x)]^2 \, dx = \frac{2}{2p+1}$ olduğunu gösteriniz.

17. m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, $m = n$ için

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) \, P_n(x) \, dx = \frac{2}{2n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

18. $(x^2y')' = 9y$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

19. Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

(a) $xy'' + 2y' + 4xy = 0$

(b) $x^2y'' + 3xy' + (1 + x)y = 0$

(c) $x^2y'' + 2x^2y' + (x^4 + x^2 - 2)y = 0$

(d) $x^2y'' + (2x^2 + x)y' + (x^2 + 3x - 1)y = 0$

BÖLÜM 7

Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri

Bundan önceki bölümlerde, bir bağımsız ve bir bağımlı değişkeni içeren tek diferansiyel denklemleri inceledik. Şimdi ise, bir bağımsız değişken ve iki veya daha fazla bağımlı değişkeni bulunan ve genellikle bağımlı değişken sayısı kadar diferansiyel denklemden oluşan **"Diferansiyel denklem sistemleri"** ni inceleyeceğiz. Burada sadece birkaç tür lineer diferansiyel denklem sistemi gözönüne alınacak ve bunların çözümü için genel olarak operatör metodu ve sırası geldiğinde görülecek olan diğer bazı metodlar uygulanacaktır. Bu bölümde ayrıca, matris ve vektörler hakkında genel bilgi verildikten sonra bunların n sayıda standart türden lineer diferansiyel denklem sisteminin çözümünde nasıl uygulanacağı konusu ele alınacaktır.

7-1 LİNEER SİSTEM TÜRLERİ

Değişik türlerde lineer diferansiyel denklem sistemi vardır. İlk akla gelen diferansiyel denklem sistemi, bağımsız değişken t, bağımlı değişkenler x ve y olmak üzere birinci mertebeden değişken katsayılı ve iki bilinmiyenli bir lineer diferansiyel denklem sistemidir. Bu şekil bir denklem sistemi, genel olarak,

$$\begin{aligned} a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)\frac{dy}{dt} + a_3(t)x + a_4(t)y &= F_1(t) \\ b_1(t)\frac{dx}{dt} + b_2(t)\frac{dy}{dt} + b_3(t)x + b_4(t)y &= F_2(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

şeklinde yazılır. Bu şekilde tanımlanan bir denklem sisteminin $x = f(t)$, $y = g(t)$ gibi bir çözüm takımı vardır. Bir $a \leq t \leq b$ aralığında, bu fonksiyonlar birlikte (1) denk-

lemlerinin herbirinde ayrı ayrı yerlerine konulduğunda denklemler sağlanır. Yukarıda verilen (1) numaralı denklem sistemi birinci mertebeden iki denklemden oluşmaktadır. Burada hemen belirtelim ki, bağımlı değişken ve denklem sayısı iki veya daha fazla olabildiği gibi, ayrıca denklemler ikinci veya daha yüksek mertebelerden türevler içerebilir.

(1) nolu diferansiyel denklem sistemi, yukarıda görüldüğü şekilde verildiği gibi, genel olarak,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1(t)x + a_2(t)y + F_1(t) \\ \frac{dy}{dt} &= b_1(t)x + b_2(t)y + F_2(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

şeklinde verilir. Bu şekil, **"Normal Form"** başlığı altında tanımlanır ve çok yaygın olarak kullanılır. Yukarıda değindiğimiz gibi böyle bir sistem şüphesiz, bağımlı değişkenlerin sayısına bağlı olarak iki veya daha fazla sayıda bilinmeyenli olabilir. Örneğin, üç bilinmeyenli bir sistem için $x = f(t)$, $y = g(t)$ ve $z = \phi(t)$ gibi üçlü bir çözüm takımı, birlikte diferansiyel denklem sisteminin çözümünü verir.

Bağımlı değişken sayısı n ve n sayıda diferansiyel denklemden oluşan normal form 'da verilmiş bir lineer denklem sistemi gözönüne alalım. Burada bağımsız değişken t ve bağımlı değişkenler $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ olsun. Bu şekilde tarif edilmiş bir denklem sistemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + F_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + F_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + F_n(t) \end{aligned} \qquad (3)$$

Hemen ifade edelim ki, burada öncelikle böyle bir sistemin çözümü ile uğraşmıyacağız ve daha çok iki bilinmeyenli ve sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemlerini konu edeceğiz. Ancak, vektörler ve matrisler konusu işlendikten sonra, matris metodu ile (3) numaralı denklem sisteminin çözümüne ışık tutulmuş olacaktır.

7-2 SABİT KATSAYILI LİNEER SİSTEMLERDE OPERATÖR METODU

İki bilinmeyenli ve sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklem sistemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$L_1 x + L_2 y = F_1(t)$$
$$L_3 x + L_4 y = F_2(t) \qquad (4)$$

Burada L_1, L_2, L_3 ve L_4 sabit katsayılı ve herbiri

$$L = a_0 D^m + a_1 D^{m-1} + \ldots + a_{m-1} D + a_m$$

şeklinde polinom operatörlerdir. $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ katsayıları da herhangi sabit sayılardır.

Şimdi amacımız (4) denklem sisteminin genel çözümünü bulmaktır. Bunun için, sistemin birinci denklemine L_4 operatörünü ve ikinci denklemine de L_2 operatörünü uygularsak,

$$L_4 L_1 x + L_4 L_2 y = L_4 F_1(t)$$
$$L_2 L_3 x + L_2 L_4 y = L_2 F_2(t)$$

elde edilir. Burada ikinci denklem birinciden çıkartılırsa,

$$(L_1 L_4 - L_2 L_3) x = L_4 F_1 - L_2 F_2 \qquad (5)$$

olur. Denk. 5 'de $L_1 L_4 - L_2 L_3$ operatörü L_5 ile gösterilirse,

$$L_5 x = F(x) \qquad (6)$$

bulunur. L_5 operatörü, sabit katsayılı bir polinom operatörüdür ve mertebesi de n ile gösterilirse, (6) denklemi sabit katsayılı ve n 'inci mertebeden bir lineer diferansiyel denklem olur. Önceki bölümlerde görüldüğü gibi bu denklemin genel çözümü,

$$x(t) = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n + x_p(t) \qquad (7)$$

olur. Burada $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları, (6) denkleminin homogen kısmının lineer bağımsız özel çözümleri ve $x_p(t)$ fonksiyonu da, homogen olmayan (6) denkleminin sabit sayı içermiyen bir özel çözümüdür.

Şimdi (4) denklem sistemine geri dönelim. Aynı prosedür tekrarlanarak,

$$L_6 y = G(x) \qquad (8)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü ise

$$y(t) = k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_n f_n + y_p(t) \quad \text{olur.} \qquad (9)$$

(7) ve (9) denklemleri birlikte (4) numaralı denklem sisteminin genel çözümünü verir.

Görülüyor ki x ve y çözüm takımı, $c_1, c_2, \ldots, c_n, k_1, k_2, \ldots, k_n$ olmak üzere $2n$ tane keyfi sabit sayı içermektedir. Bu sabit sayıların hepsi de birbirinden bağımsız değildir ve şüphesiz bazılarının diğer bazıları cinsinden ifade edilebilmesi gerekmektedir.

Daha önce de görmüş olduğumuz gibi, (4) denklem sisteminin bağımsız katsayılar sayısı, sistemin Wronskian'ı olarak bilinen

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} = L_1 L_4 - L_2 L_3$$

operatörünün mertebesine eşittir ve bu sayıda n'dir. Öyle ise denklem sistemi n sayıda keyfi sabit sayı içerir.

Örnek 1. Aşağıda verilen lineer diferansiyel denklem sistemini çözünüz.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - 3y &= e^t \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x &= e^{3t} \end{aligned} \qquad (10)$$

"Operatör" kullanarak (10) numaralı denklem sistemini tekrar yazalım.

$$\begin{aligned} (D-1)x + (D-3)y &= e^t \\ (D+1)x + Dy &= e^{3t} \end{aligned} \qquad (11)$$

Bu iki denklem arasında önce y'yi yok edelim.

$$D(D-1)x + D(D-3)y = De^t$$

$$(D-3)(D+1)x + (D-3)Dy = (D-3)e^{3t}$$

Bu denklemlerden ikincisini birincisinden çıkartırsak, y yok edilir ve

$$[D(D-1) - (D-3)(D+1)]x = e^t - (3e^{3t} - 3e^{3t})$$

$$(D^2 - D - D^2 + 2D + 3)x = e^t$$

$$(D+3)x = e^t \qquad (12)$$

elde edilir. Görülüyor ki, Denk. 12, yalnız x için, birinci mertebeden homogen olmayan lineer bir adi diferansiyel denklemdir. Bu denklemin homogen kısmının çözümü,

$$x_c = c_1 e^{-3t}$$

ve homogen olmayan kısmının bir özel çözümü ise

$$x_p = Ae^{t}$$

dır. x_p 'nin değeri, diferansiyel denklemde yerine konulduğunda,

$$Ae^{t} + 3Ae^{t} = e^{t}, \qquad A = \frac{1}{4}$$

bulunur. Buna göre, Denk. 12 'nin genel çözümü,

$$x = c_1 e^{-3t} + \frac{1}{4} e^{t} \tag{13}$$

bulunur.

y 'nin bulunmasına gelince, bunun için değişik yöntemler uygulanabilir. Bunlardan biri, aşağıda görüldüğü gibi, yukarıda uygulanan prosedür aynen tekrarlanır ve bu defa x yok edilir ve y bulunur.

$$(D + 1)(D - 1)x + (D + 1)(D - 3)y = (D + 1)e^{t}$$

$$(D - 1)(D + 1)x + (D - 1)Dy = (D - 1)e^{3t}$$

Bu denklemlerden birincisini ikincisinden çıkartırsak,

$$(D + 3)y = 2(e^{3t} - e^{t}) \tag{14}$$

elde edilir. Bu denklemin homogen kısmının çözümü,

$$y_c = k_1 e^{-3t}$$

ve homogen olmayan kısmın özel çözümü,

$$y_p = Ae^{3t} + Be^{t}$$

olur. y_p 'yi, Denk. 14 'de yerine koyarsak,

$$3Ae^{3t} + Be^{t} + 3Ae^{3t} + 3Be^{t} = 2e^{3t} - 2e^{t}$$

$$(3A + 3A - 2)e^{3t} + (B + 3B + 2)e^{t} = 0$$

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = -\frac{1}{2}$$

Buradan, $y_p = \frac{1}{3} e^{3t} - \frac{1}{3} e^{t}$ elde edilir. Bu durumda, (14) denkleminin genel çözümü,

$$y = y_c + y_p = k_1 e^{-3t} + \frac{1}{3} e^{3t} - \frac{1}{2} e^{t}$$ bulunur.

Şimdi, (11) denklem sistemini tekrar gözönüne alalım ve sistemin Wronskian 'ını bulalım.

$$W = \begin{vmatrix} D-1 & D-3 \\ D+1 & D \end{vmatrix} = \left(D^2 - D\right) - (D+1)(D-3) = D+3$$

Wronskian 'ın değeri $D-3$ olduğuna, yani mertebesi "1" olduğuna göre, sistemin bağımsız sabit sayısı bir tane olmak zorundadır. Buna göre, k_1 ile c_1 arasındaki bağıntıyı bulmak için, x ve y 'nin yukarıda bulunan değerleri (11) denklem sisteminin denklemlerinden birinde yerine konursa,

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x = e^{3t}$$

$$\left(-3c_1 e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{t}\right) + \left(-3k_1 e^{-3t} + e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t}\right) + \left(c_1 e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{t}\right) = e^{3t}$$

$$\left(-3c_1 - 3k_1 + c_1\right) e^{-3t} = 0$$

$$k_1 = -\frac{2}{3}c_1$$

bulunur. Sonuç olarak, verilen lineer diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü,

$$x = ce^{-3t} + \frac{1}{4}e^{t}$$

$$y = -\frac{2}{3}ce^{-3t} + \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t} \qquad \text{olur.} \tag{15}$$

Örnek 2. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2x - 4y = e^{t}$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = e^{4t}$$

Lineer denklem sistemini çözünüz.

Önce, operatör kullanarak denklem sistemini yeniden yazalım.

$(D-2)x + (D-4)y = e^{t}$

$Dx + (D-1)y = e^{4t}$

x ve y'nin değerlerini aşağıdaki şekilde kolayca bulabiliriz.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e^{t} & D-4 \\ e^{4t} & D-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-2 & D-4 \\ D & D-1 \end{vmatrix}} = \frac{(D-1)e^{t} - (D-4)e^{4t}}{(D-1)(D-2) - D(D-4)} = \frac{0}{D+2}$$

veya

$$(D+2)x = 0$$

bulunur. Bu denklem çözülürse,

$$x = ce^{-2t}$$

elde edilir. y'nin bulunmasına gelince,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} D-2 & e^{t} \\ D & e^{4t} \end{vmatrix}}{D+2} = \frac{4e^{4t} - 2e^{4t} - e^{t}}{D+2}$$

elde edilir. Burada eşitliğin her iki tarafına $(D+2)$ operatörü uygulanırsa,

$$(D+2)y = 2e^{4t} - e^{t}$$

olur. Bu denklemin homogen kısmının çözümü,

$$y_c = ke^{-2t}$$

ve homogen olmayan kısmının bir özel çözümü,

$y_p = Ae^{4t} + Be^{t}$ bulunur.

$$4Ae^{4t} + Be^{t} + 2Ae^{4t} + 2Be^{t} = 2e^{4t} - e^{t}$$

$4A + 2A = 2$, buradan $A = \frac{1}{3}$

$B + 2B = -1$, buradan $B = -\frac{1}{3}$

bulunur. Bu durumda, verilen lineer diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü,

$$x = ce^{-2t}$$

$$y = ke^{-2t} + \frac{1}{3}(e^{4t} - e^{t})$$

bulunur.

Wronskian 'ın değeri ise $(D + 2)$ olduğundan, sistemin yalnız bir tane keyfi sabit sayı içermesi gerekmektedir.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = e^{4t}$$

$$-2ce^{-2t} - 2ke^{-2t} + \frac{4}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^{t} - ke^{-2t} - \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{1}{3}e^{t} = e^{4t}$$

$$(-2c - 3k)e^{-2t} = 0$$

$$k = -\frac{2}{3}c$$

Buna göre, denklem sisteminin genel çözümü,

$$x = ce^{-2t}$$

$$y = -\frac{2}{3}ce^{-2t} + \frac{1}{3}\left(e^{4t} - e^{t}\right)$$

bulunur.

Örnek 3. $2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x + y = t^2 + 4t$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + 2y = 2t^2 - 2t$$

denklem sistemini çözünüz.

Operatör metodu kullanarak sistemi yeniden yazalım.

$(2D + 1)x + (D + 1)y = t^2 + 4t$

$(D + 2)x + (D + 2)y = 2t^2 - 2t$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} t^2 + 4t & D+1 \\ 2t^2 - 2t & D+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2D+1 & D+1 \\ (D+2) & D+2 \end{vmatrix}} = \frac{(D+2)(t^2+4t) - (D+1)(2t^2-2t)}{2D^2 + 5D + 2 - D^2 - 3D - 2}$$

$(D^2 + 2D)x = D\,(D + 2)x = 8t + 6$

$x_c = c_1 + c_2e^{-2t}$ ve $x_p = At^2 + Bt$

$2A + 2\,(2At + B) = 8t + 6$

$4At + (2A + 2B) = 8t + 6$

$4A = B\,,\qquad A = 2$

$2A + 2B = 6\,,\qquad B = 1$

Buna göre,

$x = c_1 + c_2e^{-2t} + 2t^2 + t$ olur.

y 'nin değeri de aynı şekilde bulunur.

$(D^2 + 2D)y = -4t - 8$

$y_c = k_1 + k_2e^{-2t}$ ve $y_p = At^2 + Bt$

$2A + 2\,(2At + B) = -4t - 8$

$4At + (2A + 2B) = -4t - 8$

$A = -1\,,\qquad 2B = -8 + 2\,,\qquad B = -3$

Öyle ise,

$y = k_1 + k_2e^{-2t} - t^2 - 3t$ olur.

$(2D + 1)x + (D + 1)y = t^2 + 4t$

$2\,(-2c_2e^{-2t} + 4t + 1) + (c_1 + c_2e^{-2t} + 2t^2 + t)$

$+ (-2k_2e^{-2t} - 2t - 3) + (k_1 + k_2e^{-2t} - t^2 - 3t) = t^2 + 4t$

$(-4c_2 + c_2 - 2k_2 + k_2)e^{-2t} + (2 - 3 + c_1 + k_1) = 0$

Buradan, $k_2 = -3c_2$ ve $k_1 = (1 - c_1)$ bulunur. Buna göre, verilen lineer diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü,

$$x = c_1 + c_2 e^{-2t} + 2t^2 + t$$

$$y = (1 - c_1) - 3c_2 e^{-2t} - t^2 - 3t$$

olur. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabit sayılardır.

Örnek 4. $2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x + 5y = 4t$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + 2y = 2$$

Lineer diferansiyel denklem sistemini çözünüz.

$$(2D + 1)x + (D + 5)y = 4t$$

$$(D + 2)x + (D + 2)y = 2$$

Önce x'in değerini bulalım.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4t & (D+5) \\ 2 & (D+2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (2D+1) & (D+5) \\ (D+2) & (D+2) \end{vmatrix}} = \frac{(4 + 8t) - (2 \,.\, 5)}{D^2 - 2D - 8} = \frac{8t - 6}{D^2 - 2D - 8}$$

$$(D^2 - 2D - 8)x = 8t - 6$$

$$x_c = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}$$

$$x_p = At + B$$

olur. x_p'nin bu değeri denklemde yerine konursa

$$(D^2 - 2D - 8)(At + B) = 8t - 6$$

$$-2A - 8At - 8B = 8t - 6$$

$$A = -1, \qquad B = 1$$

Buna göre,

$$x = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t} - t + 1 \qquad \text{bulunur.}$$

Bu defa, y'nin bulunması için değişik bir yöntem uygulayacağız. Bunun için, verilen lineer denklem sisteminde y'nin türevlerini yok edecek şekilde denklemlerden birini diğerinden çıkartacağız. O zaman,

$$\frac{dx}{dt} - x + 3y = 4t - 2$$

elde edilir. x'ın yukarıda bulunan değeri burada yerine konursa aşağıdaki şekilde y bulunur.

$$(4c_1e^{4t} - 2c_2e^{-2t} - 1) - (c_1e^{4t} + c_2e^{-2t} - t + 1) + 3y = 4t - 2$$

$$3c_1e^{4t} - 3c_2e^{-2t} - 2 + t + 3y = 4t - 2$$

$$3y = -3c_1e^{4t} + 3c_2e^{-2t} + 3t$$

$$y = -c_1e^{4t} + c_2e^{-2t} + t$$

Buna göre, verilen denklem sisteminin genel çözümü,

$$x = c_1e^{4t} + c_2e^{-2t} - t + 1$$

$$y = -c_1e^{4t} + c_2e^{-2t} + t$$

dır.

Örnek 5. $$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + (k_1 + k_2)\,x_1 - k_2x_2 = 0$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} - k_2x_1 + k_2x_2 = 0$$

Lineer diferansiyel denklem sistemini, $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 4$, $k_2 = 2$ değerleri için ve

$$x_1(0) = 1, \qquad x_1'(0) = 0$$

$$x_2(0) = 5, \qquad x_2'(0) = 0$$

sınır-değer şartlarına göre çözünüz.

Önce verilen değerler (16) denkleminde yerlerine konursa,

$$2\frac{d^2x_1}{dt^2} + 6x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} - 2x_1 + 2x_2 = 0$$

elde edilir. Operatör kullanarak (16) numaralı denklem sistemi yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned}(D^2 + 3)x_1 - x_2 &= 0\\ -2x_1 + (D^2 + 2)x_2 &= 0\end{aligned} \qquad (17)$$

olur. Bu iki denklemden birincisi +2 ile çarpılır ve ikincisine $(D^2 + 3)$ operatörü uygulanır ve sonra da denklemler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}&2(D^2 + 3)x_1 - 2x_2 = 0\\ +\quad &-2(D^2 + 3)x_1 + (D^2 + 3)(D^2 + 2)x_2 = 0\\ \hline &[(D^4 + 5D^2 + 6) - 2]x_2 = 0\\ &(D^4 + 5D^2 + 4)x_2 = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$m^4 + 5m^2 + 4 = (m^2 + 4)(m^2 + 1) \quad \text{ve} \quad m_{1,2} = \pm 2i,\ m_{3,4} = \pm i$$

bulunur. Bu durumda,

$$x_2 = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 \sin t + c_4 \cos t$$

elde edilir.

x_2 'nin bu değeri, (17) denklemlerinden birinde yerine konursa aşağıdaki şekilde x_1 bulunur.

$$-2x_1 + (D^2 + 2)x_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[\left(D^2 + 2\right)x_2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(-4c_1 \cos 2t - 4c_2 \sin 2t - c_3 \sin t - c_4 \cos t\right.$$

$$\left. + 2c_1 \cos 2t + 2c_2 \sin 2t + 2c_3 \sin t + 2c_4 \cos t\right)$$

$$x_1 = -c_1 \cos 2t - c_2 \sin 2t + \frac{1}{2}c_3 \sin t + \frac{1}{2}c_4 \cos t$$

Böylece, x_1 ve x_2'nin değerleri bulunduktan sonra, başlangıç-değer şartları uygulanarak c_1, c_2, c_3 ve c_4 keyfi sabitlerinin değerleri bulunur.

$$x_1(0) = -c_1 + \frac{c_4}{2} = 1, \qquad \text{veya} \qquad -2c_1 + c_4 = 2$$

$$x_2(0) = c_1 + c_4 = 5, \qquad \text{veya} \qquad 2c_1 + 2c_4 = 10$$

Bu iki denklemden, $c_1 = 1$ ve $c_4 = 4$ bulunur.

$$x_1'(t) = 2c_1 \sin 2t - 2c_2 \cos 2t + \frac{1}{2} c_3 \cos t - \frac{1}{2} c_4 \sin t$$

$$x_1'(0) = -2c_2 + \frac{1}{2} c_3 = 0, \qquad \text{veya} \qquad -4c_2 + c_3 = 0$$

$$x_2'(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t + c_3 \cos t - c_4 \sin t$$

$$x_2'(0) = 2c_2 + c_3 = 0, \qquad \text{veya} \qquad 2c_2 + c_3 = 0$$

Son iki denklemden, $c_2 = c_3 = 0$ bulunur. Buna göre, verilen diferansiyel denklemin sistemin genel çözümü

$$x_1 = -\cos 2t - 2 \cos t$$

$$x_2 = \cos 2t + 4 \cos t$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıda verilen lineer denklem sistemlerini çözünüz.

1. $3\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - x - y = t - 1$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x = t + 2$$

2. $2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + x - y = 3e^t$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + 2y = e^t$$

3. $Dx + (D + 2)y = \sin t$

$(D - 1)x + (D - 1)y = 0$

4. $(D^2 - 1)x + 5Dy = t$

$2Dx - (D^2 - 4)y = 2$

5. $(3D + 2)x + (D - 6)y = 5e^t$

$(4D + 2)x + (D - 8)y = 5e^t + 2t - 3$

6. $2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t$

$\frac{dx}{dt} + 3x + y = 0$

7. $Dx + (D + 1)y = 1$

$(D + 2)x - (D - 1)z = 1$

$(D + 1)y + (D + 2)z = 0$

8. $(D^2 - 2)x - 3y = e^{2t}$

$x + (D^2 + 2)y = 0$

9. $(D^2 + 1)x + 4(D - 1)y = 4e^t$

$(D - 1)x + (D + 9)y = 0$

$x(0) = 5, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}$

10. $D^2x + (D - 1)y = 0$

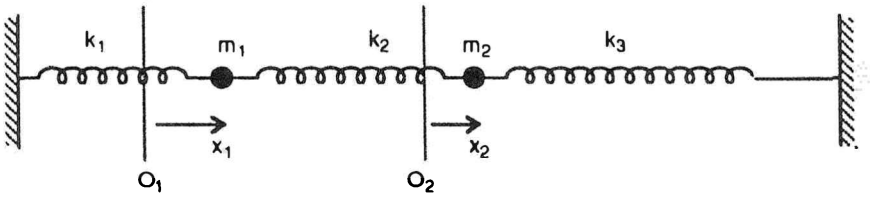
$(2D - 1)x + (D - 1)z = 0$

$(D + 3)x + (D - 4)y + 3z = 0$

7-3 LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN UYGULAMALARI

Fizikte, ekonomide, biyolojide, kimyada, elektrikte ve daha birçok bilim dalında görülen pekçok problemin çözümünde lineer diferansiyel denklem sistemleri ile karşılaşılır. Aşağıda öncelikle ele alacağımız kütle - yay sistemi buna güzel bir örnektir.

Sürtünmesiz yatay bir düzlem üzerinde hareket edebilen m_1 ve m_2 kütleli iki cisim, ağırlıksız yaylarla, Şekil 1 'de görüldüğü gibi biribirine



Şekil 1

bağlıdır ve yatay bir doğru üzerinde titreşim hareketi yapmaktadır. Yayların esneklik katsayıları, sıra ile, k_1 , k_2 ve k_3'dır. O_1 ve O_2 konumları cisimlerin denge konumlarıdır.

Cisimlerden birincisi denge konumundan itibaren a_1 uzaklığına ve ikinci cisim a_2 uzaklığına götürülmüş ve aynı $t = 0$ anında birlikte serbest bırakılmış olsun. Bundan sonra cisimlerin herbiri denge konumu etrafında bir titreşim hareketi yapacaktır. Herhangi bir $t > 0$ anında cisimlerin denge konumlarından itibaren nerede bulunduğunu, hangi hız ve ivme ile hareket etmekte olduğunu bulmak amacımızdır.

Kabul edelim ki, gözönüne alınan t anında, m_1 kütleli cisim denge konumundan itibaren, pozitif x ekseni yönünde sağ tarafta x_1 uzaklığında ve m_2 kütleli cisim de denge konumundan itibaren gene sağ tarafta x_2 uzaklığında bulunmuş olsun. Şimdi burada amacımız, t anında cisimlerin herbirine etki eden kuvvetleri gözönüne almak ve sonuç olarak cisimlerin ayrı ayrı hareket denklemlerini yazmaktır.

Cisimlerin sürtünmesiz olarak hareket ettiği ve hareketi etkileyen kuvvetlerin sadece geri çağırma kuvvetleri olduğu düşünülecek olursa, cisimlerin herbirinin hareket denklemi,

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1)$$

olur. Bu denklemler aşağıdaki şekilde tekrar yazılırsa,

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Görülüyor ki, iki bilinmiyenli iki denklemden oluşan bu denklem sistemi, sabit katsayılı, lineer ve homogen bir denklem sistemidir. Başlangıç şartları ise problemin ifadesinden anlaşılacağı üzere,

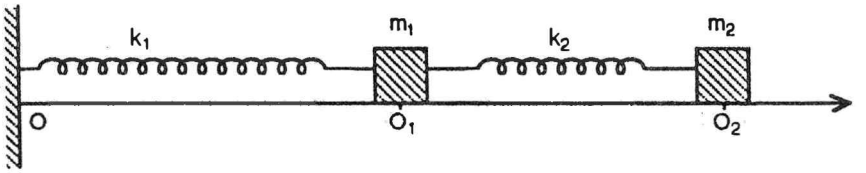
$$x_1(0) = a_1,\ x_1'(0) = 0 \text{ ve } x_2(0) = a_2,\quad x_2'(0) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Başlangıç şartları bilinen bu denklem sistemi kolayca çözülür.

Yukarıda verilen başlangıç şartlarına ek olarak, $m_1 = m_2 = m$ ve $k_1 = k_2 = k_3 = k$ olması halinde denklem sisteminin çözümü okuyucuya bırakılmış bulunmaktadır.

Şimdi yaylı sistemlere örnek problem olarak aşağıdaki problemi çözmeye çalışalım.

Örnek 1. Yatay ve sürtünmesiz bir düzlem üzerinde hareket etmekte olan $m_1 = 2\ kg$ ve $m_2 = 1\ kg$ olan cisimler, Şekil 2 'de görüldüğü gibi, ağırlıksız yaylarla birbirine tutturulmuş olarak denge konumları etrafında salınım hareketi yapmaktadırlar. $k_1 = 4\ N/m$ ve $k_2 = 2\ N/m$ olduğu ve başlangıç şartları $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = 5$ ve $x_2'(0) = 0$ olduğu bilindiğine göre, herhangi bir $t > 0$ anında cisimlerin herbirinin denge konumundan hangi uzaklıkta olduğunu bulunuz (Şekil 2).



Şekil 2

Herhangi bir t anında, m_1 cismi O_1 'in sağında x_1 uzaklığında ve m_2 cismi de O_2 'nin sağında x_2 uzaklığında olsun. Bu durumda cisimlerin hareket denklemi,

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 (x_2 - x_1)$$

olur. Denklemler düzenli şekilde tekrar yazılırsa,

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0$$

$$m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0$$

elde edilir. Bilinen değerler yerlerine konursa,

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 3 x_1 - x_2 = 0$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} - 2 x_1 + 2 x_2 = 0$$

bulunur. Operatör kullanarak bu diferansiyel denklem sistemini yeniden yazalım.

$$\begin{aligned} (D^2 + 3)x_1 - x_2 &= 0 \\ -2x_1 + (D^2 + 2)x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (18)$$

Birinci denklemin bütün terimlerine $(D^2 + 2)$ operatörünü uygular ve denklem sistemini yeniden yazarsak,

$$(D^2 + 2)(D^2 + 3)x_1 - (D^2 + 2)x_2 = 0$$
$$-2x_1 + (D^2 + 2)x_2 = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$[(D^2 + 2)(D^2 + 3) - 2]\, x_1 = 0 \qquad (19)$$

bulunur. Denk. 19 'un karakteristik yardımcı denklemi,

$$m^4 + 5m^2 + 4 = (m^2 + 1)(m^2 + 4)$$

olduğundan, (19) denkleminin çözümü

$$x_1 = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 \sin 2t + c_4 \cos 2t \qquad (20)$$

bulunur.

Bu defa, (18) denklem sisteminde ikinci denklemin bütün terimlerine $(D^2 + 3)$ operatörünü uygular ve birinci terimin bütün terimlerini de 2 ile çarpar ve sonra denklemleri taraf tarafa toplarsak,

$$[(D^2 + 2)(D^2 + 3) - 2]\, x_2 = 0$$

denklemi elde edilir. Aynı şekilde bu denklemin çözümü,

$$x_2 = k_1 \sin t + k_2 \cos t + k_3 \sin 2t + k_4 \cos 2t \qquad (21)$$

bulunur.

(18) numaralı denklem sisteminin katsayılar determinantı,

$$\begin{vmatrix} D^2 + 3 & -1 \\ -2 & D^2 + 2 \end{vmatrix} = D^4 + 5D^2 + 4$$

4 üncü dereceden bir "operatör" olduğundan, (18) numaralı denklem sisteminin dört keyfi sabit sayı içermesi gerekmektedir. Buna göre, (20) ve (21) denklemleri ile verilen x_1 ve x_2 değerleri ve türevleri (18) denklem sisteminde yerlerine konursa,

$$k_1 = 2c_1, \qquad k_2 = 2c_2, \qquad k_3 = -c_3, \qquad k_4 = -c_4$$

bulunur.

Şimdi, (20) ve (21) denklemlerine başlangıç şartları uygulanırsa, katsayılar arasında var olan aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$c_2 + c_4 = 1 \qquad c_1 + 2c_3 = 0$$

ve

$$2c_2 - c_4 = 5 \qquad 2c_1 - 2c_3 = 0$$

Buradan, $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ ve $c_4 = -1$

bulunur. Bu değerler (5) ve (7) denklemlerinde yerlerine konursa,

$$x_1 = 2\cos t - \cos 2t$$

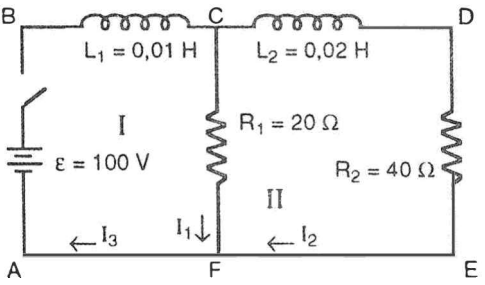
$$x_2 = 4\cos t + \cos 2t$$

bulunur.

Lineer diferansiyel denklem sistemlerinin ikinci ve çok önemli bir uygulama alanı, elektrik - devre problemleridir. İkinci mertebeden sabit katsayılı ve homogen olmayan lineer diferansiyel denklemlerin uygulama alanına giren elektrik - devre problemlerini önceden, Bölüm 5'de inceledik. Orada gözönüne alınan elektrik devreler, birtek kapalı devreden oluşmaktaydı. Şimdi ise, iki veya daha fazla kapalı devre içeren elektrik-devre problemlerini ele alacağız.

Örnek 2. Aşağıdaki Şekil 3'de verilen elektrik devresinde, kolların herbirinden geçen I_1, I_2 ve I_3 akım şiddetlerinin ani değerlerini bulunuz.

Açıkca görülüyor ki, burada üç adet kapalı devre vardır. ABCF ve CDEF kapalı devreleri birbirinden bağımsız olmakla beraber, ABCDEF kapalı devresi diğer iki kapalı devreden bağımsız değildir. Bu nedenle yalnız I ve II kapalı devreleri gözönüne alınacaktır.



Şekil 3

Bu problemin çözümünde, önceden ifade edilmiş bulunan ikinci Kirchhoff kanununa ilaveten birinci Kirchhoff kanunu birlikte kullanılacaktır. Buna göre, iki veya daha fazla kapalı devre içeren bir elektrik - devrede, herhangibir bağlantı noktasına gelen kollardaki elektrik akım şiddetleri toplamı, aynı noktadan çıkan kollardaki akım şiddetleri toplamına eşittir.

Açıkca görülüyor ki, F noktası üç ayrı devre kolunun birleştiği bir noktadır. Herhangibir t anında, bu noktaya gelen ve buradan çıkan elektrik akımlarının

yönleri Şekil 3 'de gösterildiği gibi olsun. F noktasına birinci Kirchhoff kanunu, *ABCF* ve *CDEF* kapalı devrelerine de ikinci Kirchhoff kanunu uygulanırsa, I_1 , I_2 ve I_3 cinsinden aşağıdaki üç denklem elde edilir.

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$20\, I_1 + 0{,}01\, \frac{dI_3}{dt} = 100$$

$$-20\, I_1 + 0{,}02\, \frac{dI_2}{dt} + 40\, I_2 = 0$$

Bu denklemlerden ikincisinde I_3 yerine $I_1 + I_2$ yazılırsa, denklem sistemi,

$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + 2000\, I_1 = 10000$$

$$\frac{dI_2}{dt} - 1000\, I_1 + 2000\, I_2 = 0$$

olur. Operatör kullanarak bu denklem sistemi yeniden yazılırsa,

$$(D + 2000)\, I_1 + D\, I_2 = 10000$$

$$-1000\, I_1 + (D + 2000)\, I_2 = 0 \qquad (22)$$

elde edilir. Örnek Problem 1'de görüldüğü şekilde (22) numaralı denklem sisteminin çözümü okuyucuya bırakılmış olup biz sadece sonucu vermekle yetineceğiz. $t = 0$ anında her koldaki akım şiddeti "sıfır" kabul edildiğine göre, kısa süre içinde kollardaki akım şiddetlerinin ani değerleri,

$$I_1 = -\frac{10\, e^{-1000t}}{3} - \frac{5\, e^{-4000t}}{3} + 5$$

$$I_2 = -\frac{10\, e^{-1000t}}{3} + \frac{5\, e^{-4000t}}{6} + \frac{5}{2}$$

$$I_3 = -\frac{20\, e^{-1000t}}{3} - \frac{5\, e^{-4000t}}{6} + 7\,\frac{1}{2}$$

bulunur. Burada açıkca görülüyor ki, kısa süre içinde kollardaki akım şiddeti sabit değere ulaşır ve zamana bağlı olmaktan çıkar.

$t \to \infty$ için $I_1 = 5$ A , $I_2 = 5/2$ A ve $I_3 = 7{,}5$ A

sabit değerlerine ulaşır.

Bundan başka, lineer diferansiyel denklem sistemlerinin kimya'da büyük uygulama alanı olduğu bir gerçektir. Örneğin, bir madde reaksiyona girdiğinde bu maddeden ve türevlerinden değişik maddeler oluşmaktadır. Herhangibir t anında her maddeden ne kadar bulunduğunun bilinmesi önemli bir problemdir. Aşağıdaki örnek bu şekil bir probleme ışık tutmaktadır.

Örnek 3. $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} D$ seri reaksiyon grubunu gözönüne alınız. Burada k_1 ve k_2 reaksiyon hız sabitleridir. Herhangibir t anında A, B ve D bileşenlerinin "mol" cinsinden değerlerini bulunuz.

A Bileşenininin yok olma, B ve D bileşenlerinin üretim hızları, sıra ile

$$\frac{dC_A}{dt} = -k_1 C_A$$

$$\frac{dC_B}{dt} = -k_1 C_A - k_3 C_B$$

$$\frac{dC_D}{dt} = -k_3 C_B$$

dir. Ayrıca sistemdeki toplam "mol" sayısı değişmiyeceğinden,

$$C_{A_0} = C_A + C_B + C_D$$

yazılabilir. Bu bağıntı, diferansiyel denklem sisteminin bir başlangıç şarttıdır ve sistemin çözümünde gözönünde tutulacaktır.

Yukarıdaki denklem sistemi operatör metodu kullanılarak yeniden yazılırsa,

$$(D + k_1)C_A = 0$$

$$-k_1 C_A + (D + k_3)C_B = 0$$

$$-k_3 C_B + DC_D = 0$$

olur. Burada bilinmiyenler C_A, C_B ve C_D 'dir. Daha önce de ifade edilmiş olduğu üzere bu sayılar, gözönüne alınan t anında A, B ve D ürünlerinin herbirinin "mol" cinsinden değeridir.

Yukarıda belirtilen başlangıç şartına ek olarak, başlangıç anında B ve D bileşenlerinin miktarı $C_B = C_D = 0$ ve A 'nın miktarı $C_A = C_{A_0}$ olduğu gözönüne alınarak denklem sistemi çözülürse,

$$C_A = C_{A_0} e^{-k_1 t}$$

$$C_B = C_{A_0} k_1 \left(\frac{e^{-k_1 t}}{k_3 - k_1} + \frac{e^{-k_3 t}}{k_1 - k_3} \right)$$

$$C_D = C_{A_0} \left(1 + \frac{k_3}{k_1 - k_3} e^{-k_1 t} + \frac{k_1}{k_3 - k_1} e^{-k_3 t} \right)$$ elde edilir.

7-4 NORMAL FORM LİNEER SİSTEMLER

İki bilinmeyenli ve iki denklemli "Normal Form" bir lineer diferansiyel denklem sistemi, daha önce de belirtildiği gibi, genel olarak aşağıdaki şekilde verilir.

$$\frac{dx}{dt} = a_1(t)x + a_2(t)y + F_1(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1(t)x + b_1(t)y + F_2(t) \qquad (23)$$

Burada a_1, a_2, b_1, b_2, F_1 ve F_2 fonksiyonlarının hepsi de, t 'nin bir $a \le t \le b$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. Eğer, t 'nin bütün değerleri için $F_1(t)$ ve $F_2(t)$ fonksiyonlarının ikisi de "sıfır" ise, (23) lineer denklem sistemi homogen bir sistem ve bu fonksiyonlardan ikisi veya yalnız birisi sıfırdan farklı ise, adı geçen sistem, homogen olmayan bir sistem olur.

Normal form bir lineer denklem sistemi, burada olduğu şekilde iki bilinmiyenli olduğu gibi üç bilinmiyenli veya daha fazla sayıda bilinmiyenli, $(x, y, z, \ldots)$ olabilir. Ayrıca, bilinmiyenlerin katsayıları a_1, a_2, b_1, b_2, ... serbest değişken t 'nin fonksiyonları olduğu gibi, genel olarak sabit sayılar da olabilirler.

Tanım: İki bilinmiyenli ve iki denklemden oluşan normal form bir lineer denklem sisteminin çözümü de $x = f(t)$, $y = g(t)$ iki fonksiyonlu bir sistemdir ve bu fonksiyonların türevleri de $a \le t \le b$ aralığında sürekli fonksiyonlardır.

Yukarıdaki tarife göre, (23) denklem sisteminin bir çözümü,

$$x = f(t), \quad y = g(t) \qquad (24)$$

gibi bir çift fonksiyondan oluşmaktadır. Bu fonksiyonların herbiri, sistemin denklemlerinde yerlerine konulduğunda denklemlerin ikisi de sağlanır.

Diferansiyel denklemlerin temel teoremi olan "Tek Çözüm" teoremini burada tekrar hatırlarsak, $a \le t \le b$ aralığında öyle bir t_0 değeri vardır ki, $f(t_0) = c_1$ ve $g(t_0) = c_2$ değerleri tekdir.

I. Homogen Lineer Sistemler

Normal form bir homogen lineer diferansiyel denklem sistemi aşağıdaki şekilde verilmiş olsun.

$$\frac{dx}{dt} = a_1(t)x + a_2(t)y$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1(t)x + b_2(t)y \qquad (25)$$

Teorem: İki bilinmeyenli ve iki denklemli bir homogen lineer denklem sisteminin iki ayrı çözümü,

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \end{cases} \qquad (26)$$

olsun. c_1 ve c_2 herhangi iki keyfi sabit sayı olmak üzere, bu çözümlerin lineer kombinasyonu olan aşağıdaki fonksiyonlar, birlikte

$$x = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

$$y = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) \qquad (27)$$

sistemin bir genel çözümüdür.

Görüldüğü gibi, bu çok genel bir teoremdir ve önceki bölümlerde ispatına ve uyulamasına geniş yer verilmiştir. Yalnız bir noktayı tekrar hatırlatmakta yarar vardır. Denk. 27'de verilen fonksiyonların (25) denklem sisteminin genel çözümü olması için, f_1, g_1 ve f_2, g_2 çözümlerinin birlikte lineer bağımsız çözümler olması gerekmektedir.

Bir örnek olarak, aşağıda verilen

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 6y \qquad (28)$$

homogen, sabit katsayılı lineer denklem sistemini gözönüne alalım. Ayrıca,

$$x = e^{5t},\ y = -3e^{5t} \qquad \text{ve} \qquad x = e^{3t},\ y = -e^{3t}$$

çözümleri de sistemin verilen iki ayrı çözüm takımı olsun. Önceden biliyoruz ki, bu çözümlerin lineer bağımsız olup olmadığını anlamak için aşağıdaki determinanta bakılır.

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} e^{5t} & e^{3t} \\ -3e^{5t} & -e^{3t} \end{vmatrix} = 2e^{8t}$$

dır. Görülüyor ki, $\Delta(t) \neq 0$ dır ve bunun anlamı, verilen çözümlerin ikisi de birbiriyle lineer bağımsızdır. Bu durumda, yukarıda verilen çözümlerin lineer kombinasyonu olan aşağıdaki denklem sistemi,

$$x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{3t}$$
$$y = -3c_1 e^{5t} - c_2 e^{3t}$$

verilen diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü olur. Burada c_1 ve c_2 herhangi keyfi sabit sayılardır.

II. Homogen Olmayan Lineer Sistemler

Homogen olmayan iki bilinmeyenli bir lineer denklem sisteminin herhangi bir özel çözümü,

$$x = f_0(t)$$
$$y = g_0(t)$$

olsun. Denklemin homogen kısmının da bir çözümü

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

ise, bu durumda

$$x = f(t) + f_0(t)$$
$$y = g(t) + g_0(t)$$

çözüm takımı homogen olmayan denklemin bir çözümü olur.

Yukarıda verilen "Teorem" uyarınca, iki bilinmeyenli sistemin homogen kısmının çözüm takımları,

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \end{cases}$$

ise, homogen olmayan denklem sisteminin genel çözümü

$$x = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + f_0(t)$$
$$y = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + g_0(t)$$

olur.

7-5 SABİT KATSAYILI HOMOGEN LİNEER SİSTEMLER

Aşağıda verilen üç bilinmeyenli homogen lineer denklem sistemini gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \frac{dz}{dt} &= a_3 x + b_3 y + c_3 z\end{aligned} \tag{29}$$

Burada, a_i, b_i ve c_i $(i = 1, 2, 3)$ sabit sayılardır. Şimdi amacımız bu denklem sisteminin genel çözümünü bulmaktır. Bunun için genel yöntem, önce sistemi sağlayan lineer bağımsız özel çözüm takımlarını bulmak ve sonra da bunların lineer kombinasyonunu alarak genel çözümü elde etmektir.

Daha önce görmüş olduğumuz gibi, λ bir sabit sayı olmak üzere, sabit katsayılı $e^{\lambda t}$ fonksiyonlarının bu sistemin özel çözümlerini oluşturacağı açıkca görülmektedir. Buna göre,

$$x = Ae^{\lambda t}, \qquad y = Be^{\lambda t}, \qquad z = Ce^{\lambda t} \tag{30}$$

bir özel çözüm takımı olabilir. Burada A, B, C ve λ bulunması gereken sabit sayılardır.

(30) numaralı denklemler, (29) denklem sisteminde yerlerine konursa,

$$\begin{aligned}(a_1 - \lambda)A + b_1 B + c_1 C &= 0 \\ a_2 A + (b_2 - \lambda)B + c_2 C &= 0 \\ a_3 A + b_3 B + (c_3 - \lambda)C &= 0\end{aligned} \tag{31}$$

elde edilir. (31) denklem sistemi, A, B ve C ye göre bir homogen lineer denklem sistemidir. Hiç şüphesiz $A = B = C = 0$ bir çözümdür ve bu çözüme **sıfır çözümü** denir. Amacımız, eğer varsa, (29) denklem sisteminin sıfır çözümünden farklı bir çözümünü bulmaktır. Bunun için, Denk. 31'de katsayılar determinantının sıfır'a eşit olması gerektiğini biliyoruz. Öyle ise,

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{32}$$

yazabiliriz. Bu determinantı açacak olursak, λ 'ya göre üçüncü dereceden bir denklem elde edilir ki buna (29) denklem sisteminin **Karakteristik denklemi** denir. Bu denklemin kökleri λ_1, λ_2 ve λ_3 de **Karakteristik kökler** adını alır. (30) denklemlerinin (29) denklem sisteminin bir özel çözümü olması için, burada λ 'nın bu değerlerden birini alması gerekmektedir.

Karakteristik denklemin köklerinin reel ve sanal olmalarına, reel olması halinde köklerin birbirinden farklı veya eşit oluşlarına göre aşağıda üç ayrı durum gözönüne alınacaktır.

A. Karakteristik Kökler Reel ve Birbirinden Farklı

Karakteristik köklerden önce λ_1 alınır ve (31) denklem sisteminde yerine konur. Buradan bulunacak katsayılar A_1, B_1 ve C_1 ile gösterilirse, (29) denkleminin bir özel çözüm takımı,

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad y = B_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad z = C_1 e^{\lambda_1 t}$$

bulunur. Bundan sonra λ_2 ve λ_3 için de ayrı ayrı diğer özel çözümler bulunur. Birbiriyle lineer bağımsız olan bu çözümlerin lineer kombinasyonu,

$$\begin{aligned} x &= c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 A_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 A_3 e^{\lambda_3 t} \\ y &= c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 B_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 B_3 e^{\lambda_3 t} \\ z &= c_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 C_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 C_3 e^{\lambda_3 t} \end{aligned}$$

(29) denklem sisteminin genel çözümünü verir.

Örnek 1.
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x - 9y + 5z \\ \frac{dy}{dt} &= x - 10y + 7z \\ \frac{dz}{dt} &= x - 17y + 12z \end{aligned} \tag{33}$$

denklem sistemini çözünüz.

$$x = Ae^{\lambda t}, \qquad y = Bc^{\lambda t} \quad \text{ve} \quad z = Ce^{\lambda t}$$

bir özel çözümdür. (33) denklem sisteminde yerine konursa,

$$\begin{aligned} &(4 - \lambda)A - 9B + 5C = 0 \\ &A - (10 + \lambda)B + 7C = 0 \\ &A - 17B + (12 - \lambda)C = 0 \end{aligned} \tag{34}$$

elde edilir. Buradan sistemin karakteristik denklemi,

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -9 & 5 \\ 1 & -(10+\lambda) & 7 \\ 1 & -17 & 12-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \tag{35}$$

bulunur. Bu denklemin kökleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 3$ dür.

(i) Önce $\lambda_1 = 1$ değerini gözönüne alalım. λ_1 'in bu değerini, (34) denklem sisteminde yerine koyalım. Bu durumda bulunması istenen katsayılar da A_1, B_1 ve C_1 olacaktır. Böylece,

$$3A_1 - 9B_1 + 5C_1 = 0$$

$$A_1 - 11B_1 + 7C_1 = 0$$

$$A_1 - 17B_1 + 11C_1 = 0$$

elde edilir. Bu denklemlerden ikincisi üçüncüsünden çıkartılırsa

$$6B_1 - 4C_1 = 0$$

ve buradan da $B_1 = \frac{2}{3} C_1$ elde edilir. B_1 'in bu değeri ikinci denklemde yerine konursa, $A_1 = \frac{1}{3} C_1$ bulunur. Burada $A_1 = k$ ile gösterilirse,

$$A_1 = k, \quad B_1 = 2k, \quad C_1 = 3k$$

elde edilir. Burada k keyfi bir sayıdır. Biz burada, $A_1 = B_1 = C_1 = 0$ değerinden başka herhangibir değer bulmaya çalışıyoruz. Eğer $k = 1$ alınırsa,

$$A_1 = 1, \quad B_1 = 2, \quad C_1 = 3 \quad \text{bulunur.}$$

A_2, B_2, C_2 ve A_3, B_3, C_3 katsayıları da benzer şekilde bulunur.

(ii) İkinci olarak, (34) denklem sisteminde $\lambda = \lambda_2 = 2$ alınırsa,

$$2A_2 - 9B_2 + 5C_2 = 0$$

$$A_2 - 12B_2 + 7C_2 = 0$$

$$A_2 - 17B_2 + 10C_2 = 0$$

elde edilir. Bu denklemlerden $A_2 = 1$, $B_2 = 3$ ve $C_2 = 5$ elde edilir.

(iii) Son olarak, $\lambda_3 = 3$ değeri alınır ve (34) denklemlerinde yerine konursa,

$$A_3 - 9B_3 + 5C_3 = 0$$

$$A_3 - 13B_3 + 7C_3 = 0$$

$$A_3 - 17B_3 + 9C_3 = 0$$

ve buradan da $A_3 = 1$, $B_3 = -1$, $C_3 = -2$ elde edilir. O zaman üç ayrı çözüm takımı,

(1) $x = e^t$, $y = 2e^t$, $z = 3e^t$

(2) $x = e^{2t}$, $y = 3e^{2t}$, $z = 5e^{2t}$

(3) $x = e^{3t}$, $y = -e^{3t}$, $z = -2e^{3t}$

olur. Bu çözümler lineer bağımsız olduklarından sistemin genel çözümü,

$$x = c_1e^{t} + c_2e^{2t} + c_3e^{3t}$$

$$y = 2c_1e^{t} + 3c_2e^{2t} - c_3e^{3t}$$

$$z = 3c_1e^{t} + 5c_2e^{2t} - 2c_3e^{3t}$$

elde edilir. Burada c_1, c_2 ve c_3 herhangi keyfi sabit sayılardır.

Örnek 2. $\dfrac{dx}{dt} = 4x + y$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 2y$$

Bu denklem sisteminin bir çözümü $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$ olsun. Burada A, B ve λ bulunması gereken sabit sayılardır. x ve y 'nin bu değerleri sistemde yerine konursa,

$$\lambda Ae^{\lambda t} = 4Ae^{\lambda t} + Be^{\lambda t}$$

$$\lambda Be^{\lambda t} = 3Ae^{\lambda t} + 2Be^{\lambda t}$$

olur. Gerekli düzenleme yapıldığında,

$$(4 - \lambda)A + B = 0$$

$$3A + (2 - \lambda)B = 0 \qquad (36)$$

elde edilir. Burada $A = 0$, $B = 0$ bir çözümdür. A ve B 'nin bu değerleri $x = 0$, $y = 0$ çözümünü verir. Amacımız bu "sıfır" çözümünden farklı bir çözüm bulmaktır. Bunun için,

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

olmalıdır. Bu denklemin kökleri, yani karakteristik kökler, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ dır. Burada, önce $\lambda_1 = 1$ değerini gözönüne alalım ve λ 'nın bu değerini yukarıda (36) denklem sisteminde yerine koyalım. Böylece,

$$3A_1 + B_1 = 0$$

$$3A_1 + B_1 = 0$$

elde edilir. Bu sistemi sağlayan sonsuz sayıda çözüm takımı vardır. Bunlardan birisi, $A_1 = 1$ için $B_1 = -3$ olur. Bu durumda verilen diferansiyel denklem sisteminin bir çözümü,

$x = e^t$, $y = -3e^t$ bulunmuş olur.

İkinci olarak $\lambda_2 = 5$ değerini gözönüne alalım. O zaman,

$$-A_2 + B_2 = 0$$

$$3A_2 - 3B_2 = 0$$

olur. $A_2 = B_2 = 1$ bulunur. Böylece sistemin lineer bağımsız bir ikinci özel çözümü

$x = e^{5t}$, $y = e^{5t}$ bulunur.

Sonuç olarak, verilen diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü,

$$x = c_1e^t + c_2e^{5t}$$

$$y = -3c_1e^t + c_2e^{5t}$$

elde edilir.

Örnek 3. $\dfrac{dx}{dt} = x - y$

$$\frac{dy}{dt} = -2x$$

denklem sistemini çözünüz.

$x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$ bu sistemin bir özel çözümü olsun. Bu değerler denklem sisteminde yerine konursa,

$$(1 - \lambda)A - B = 0$$

$$-2a - \lambda B = 0$$

bulunur. Bu denklem sisteminden, aşağıda verilen karakteristik denklem elde edilir.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Bu denklemin kökleri ise $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = -1$ dir.

(i) $\lambda_1 = 2$ için,

$$-A_1 - B_1 = 0$$

$$-2A_1 - 2B_1 = 0$$

olur. Buradan, $A_1 = 1$ ve $B_1 = -1$ bulunur. O zaman, verilen denklem sistemini sağlayan bir çözüm takımı,

$x = e^{2t}$, $y = -e^{2t}$

elde edilir.

(ii) $\lambda_2 = -1$ için,

$$2A_2 - B_2 = 0$$

$$A_2 = 1, \qquad B_2 = 2$$

$$-2A_2 + B_2 = 0$$

ve buradan

$$x = e^{-t}, \qquad y = 2e^{-t}$$

elde edilir. Bu durumda, verilen denklem sisteminin genel çözümü,

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

$$y = -c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{-t}$$

olur.

Örnek 4. $t\dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y$

$$t\frac{dy}{dt} = 2x + y$$

denklem sistemini çözünüz.

Burada önce, $t = e^u$ değişken değiştirmesi yapılır. O zaman,

$$t\frac{dx}{dt} = t\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{du}{dt}\right) = t\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{dx}{du}$$

$$t\frac{dy}{dt} = t\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dt}\right) = t\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{dy}{du}$$

elde edilir. Burada yeni bağımsız değişken u ve değeri $u = lnt$ 'dır. Diferansiyel operatör de $D = d/du = d/dt$ dır. Bu durumda, u bağımsız değişkeni cinsinden diferansiyel denklem sistemimiz,

$$\frac{dx}{du} = 2x + 3y$$

$$\frac{dy}{du} = 2x + y$$

olur. Sistemin karakteristik denklemi,

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 \\ a_2 & b_2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-3\lambda-4=0$$

dır. Buradan $\lambda = -1, 4$ bulunur.

(i) $\lambda = -1$ için bir özel çözüm,

$x = A_1e^{-u}$, $y = B_1e^{-u}$ olur. Bu değerler denklem sisteminde yerlerine konulduğunda,

$$3A_1 + 3B_1 = 0$$

$$2A_1 + 2B_1 = 0$$

elde edilir. Buradan $A_1 = -B_1 = k$ bulunur. k'nın her değeri için bu bağıntı geçerlidir. "sıfır" çözümünden farklı bir çözüm istediğimiz için, $k = 1$ uygun bir değer olur. O zaman, $A_1 = 1$, $B_1 = -1$ bulunur. Bu durumda,

$x = e^{-u}$, $y = -e^{-u}$ bir çözüm takımıdır.

(ii) $\lambda_2 = 4$ için, $x = A_2e^{4u}$, $y = B_2e^{4u}$ bir özel çözümdür. Denklem sisteminde yerlerine konulduğunda,

$$4A_2 = 2A_2 + 3B_2$$

$$4B_2 = 2A_2 + B_2$$

elde edilir. Buradan $B_2 = 2/3\,A_2$ bulunur. Burada $A_2 = 1$ için $B_2 = 2/3$ elde edilir. Buna göre, $x = e^{4u}$, $y = 2/3e^{4u}$ bir özel çözümdür. Bu fonksiyonları biribiriyle lineer bağımsız olduklarından sistemin genel çözümü,

$$x = c_1e^{-u} + c_2e^{4u}$$

$$y = -c_1e^{-u} + \frac{2}{3}c_2e^{4u}$$

olur. Burada u yerine değeri konursa

$$x = c_1t^{-1} + c_2t^4$$

$$y = -c_1t^{-1} + \frac{2}{3}c_2t^4$$

elde edilir.

B. Karakteristik Kökler Reel ve Birbirine Eşit

(29) numaralı homogen lineer denklem sistemimizi bu defa iki bilinmiyen için tekrar yazalım.

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y$$
$$\frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \qquad (37)$$

elde edilir. Bu sistemin, sıfır çözümünden farklı bir çözümü olması için,

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

olmak gerekir. Buna göre karakteristik denklem,

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

olur. Eğer bu denklemin kökleri reel ve $\lambda_1 = \lambda_2$ ise, diferansiyel denklem sisteminin iki özel çözümü,

$$x = Ae^{\lambda_1 t}, \quad y = Be^{\lambda_1 t}$$

ve

$$x = (A_1t + A_2)e^{\lambda_1 t}, \quad y = (B_1t + B_2)e^{\lambda_1 t}$$

olur. Bu durumda sistemin genel çözümü,

$$x = c_1Ae^{\lambda_1 t} + c_2(A_1t + A_2)e^{\lambda_1 t}, \quad y = c_1Be^{t} + c_2(B_1t + B_2)e^{t}$$

olur.

Örnek 1. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - y$

$$\frac{dy}{dt} = 4x - y$$

denklem sistemini çözünüz.

$x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$ sistemin bir özel çözümüdür. Bu değerler yukarıda denklem sisteminde yerlerine konursa,

$$A\lambda e^{\lambda t} = 3Ae^{\lambda t} - Be^{\lambda t}$$
$$B\lambda e^{\lambda t} = 4Ae^{\lambda t} - Be^{\lambda t}$$

elde edilir. Buradan,

$$(3-\lambda)A - B = 0$$
$$4A - (1+\lambda)B = 0 \qquad (38)$$

bulunur. Karakteristik denklem ve kökleri,

$$\begin{vmatrix} (3-\lambda) & 1 \\ 4 & (1+\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

olur. Görülüyor ki denklemin kökleri reel ve biribirine eşittir. (38) denklem sisteminde $\lambda = 1$ konursa,

$$2A - B = 0$$
$$4A - 2B = 0$$

elde edilir. Buradan, $A = 1$, $B = 2$ ve

$$x = e^t, \qquad y = 2e^t \qquad (39)$$

bulunur.

Karakteristik denklemin kökleri birbirine eşit olduğundan ikinci özel çözüm,

$$x = (A_1 t + A_2)e^t, \qquad y = (B_1 t + B_2)e^t \qquad (40)$$

şeklindedir. Bu çözüm, diferansiyel denklemde yerine konursa,

$$(A_1 t + A_1 + A_2)e^t = 3(A_1 t + A_2)e^t - (B_1 t + B_2)e^t$$
$$(B_1 t + B_1 + B_2)e^t = 4(A_1 t + A_2)e^t - (B_1 t + B_2)e^t$$

elde edilir. Bu denklemler sadeleştirilirse,

$$(2A_1 - B_1)t + (-A_1 + 2A_2 - B_2) = 0$$
$$(4A_1 - 2B_1)t + (4A_2 - B_1 - 2B_2) = 0$$

olur. Buradan,

$$2A_1 - B_1 = 0$$
$$4A_1 - 2B_1 = 0 \qquad (41)$$

ve

$$-A_1 + 2A_2 - B_2 = 0$$
$$4A_2 - B_1 - 2B_2 = 0 \qquad (42)$$

denklem sistemleri elde edilir. (41) denklem sisteminden $A_1 = 1$, $B_1 = 2$ elde edilir. Bu değerler, (42) denklem sisteminde yerlerine konursa,

$$2A_2 - B_2 = 1$$

$$4A_2 - 2B_2 = 2$$

olur. Burada A_2 ve B_2 'den birini herhangi bir sayı olarak alabiliriz. Eğer $A_2 = 0$ alırsak $B_2 = -1$ olur. Bu değerler (40) numaralı denklem sisteminde yerlerine konursa

$$x = te^t \qquad \text{ve} \qquad y = (2t - 1)e^t \tag{43}$$

elde edilir. (39) ve (43) denklem sistemleri, aralarında lineer bağımsız olduklarından, verilen diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü

$$x = c_1e^t + c_2te^t$$

$$y = 2c_1e^t + c_2(2t - 1)e^t \qquad \text{olur.}$$

Örnek 2. $\dfrac{dx}{dt} = x + y$, $\dfrac{dy}{dt} = -x + 3y$

denklem sistemini çözünüz.

Burada karakteristik denklem,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

dır. Bu denklemin kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ dir. Buna göre, $x = Ae^{2t}$, $y = Be^{2t}$ bir çözümdür. Bu değerler diferansiyel denklemde yerlerine konulduğunda,

$$-A + B = 0$$

$$-A + B = 0$$

elde edilir. Buradan $A = B = k$ elde edilir. k herhangibir değeri alabileceğinden, $k = 1$ için, $A = 1$ ve $B = 1$ bulunur. O zaman,

$$x = e^{2t}, \qquad y = e^{2t} \qquad \text{çözümü elde edilir.}$$

Diferansiyel denklem sisteminin ikinci özel çözümü,

$$x = (A_1t + A_2)e^{2t}, \qquad y = (B_1t + B_2)e^{2t}$$

dır. Bu değerler denklem sisteminde yerlerine konulduğunda,

$$A_1 + 2A_2 + 2A_1t = (A_1 + B_1)t + A_2 + B_2$$

$$B_1 + 2B_2 + 2B_1t = (3B_1 - A_1)t - A_2 + 3B_2$$

elde edilir. Buradan,

$$A_1 - B_1 = 0 \qquad B_1 - A_1 = 0$$

ve

$$A_1 + A_2 - B_2 = 0 \qquad B_1 + A_2 - B_2 = 0$$

bulunur. Burada, $A_1 = B_1 = k$ olduğundan, k'nın "sıfır" dan farklı herhangibir değeri için, örneğin $k = 1$ için $A_1 = 1$ ve $B_1 = 1$ elde edilir. $A_2 - B_2 = -1$ bağıntısında A_2 veya B_2 den birisi "sıfır" olabilir. $A_2 = 0$ için $B_2 = 1$ bulunur. Bu durumda, diferansiyel denklem sistemini sağlıyan bir çözüm

$$x = te^{2t}, \qquad y = (t+1)e^{2t}$$

bulunur. O zaman, denklem sisteminin genel çözümü

$$x = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}, \quad y = c_1e^{2t} + c_2(t+1)e^{2t}$$

elde edilir.

Örnek 3.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -8x + 47y - 8z \\ \frac{dy}{dt} &= -4x + 18y - 2z \\ \frac{dz}{dt} &= -8x + 39y - 5z \end{aligned} \tag{44}$$

denklem sistemini çözünüz.

Sistemin karakteristik denklemi,

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 - \lambda & 47 & -8 \\ -4 & 18 - \lambda & -2 \\ -8 & 39 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 1) = 0$$

Buradan $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 1$ bulunur.

Görülüyor ki, örnekte karakteristik köklerden ikisi biribirine eşit, üçüncüsü ise bunlardan farklıdır.

(i) $x = Ae^{2t}, \qquad y = Be^{2t}, \qquad z = Ce^{2t}$

bir çözümdür. Verilen denklem sisteminde yerlerine konursa,

$$\begin{aligned} 10A - 47B + 8C &= 0 \\ 4A - 16B + 2C &= 0 \\ 8A - 39B + 7C &= 0 \end{aligned} \tag{45}$$

elde edilir. Bu denklemlerden $B = 6/17A$ ve $C = 14/17A$ elde edilir. Burada $A = 17$ seçilirse, $B = 6$ ve $C = 14$ olur. O zaman

$$x = 17e^{2t}, \quad y = 6e^{2t}, \quad z = 14e^{2t} \tag{46}$$

bulunur ve bu bir özel çözümdür.

(ii) $\lambda_2 = \lambda_1 = 2$ olduğundan, sistemin ikinci özel çözümü,

$$x = (A_1t + A_2)e^{2t}, \quad y = (B_1t + B_2)e^{2t}, \quad z = (C_1t + C_2)e^{2t} \tag{47}$$

dır. x, y ve z'nin bu değerleri denklem sisteminde yerlerine konursa,

$$(10A_1 - 47B_1 + 8C_1)t + (A_1 + 10A_2 - 47B_2 + 8C_2) = 0$$

$$(4A_1 - 16B_1 + 2C_1)t + (4A_2 + B_1 - 16B_2 + 2C_2) = 0$$

$$(8A_1 - 39B_1 + 7C_1)t + (8A_2 - 39B_2 + C_1 + 7C_2) = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} 10A_1 - 47B_1 + 8C_1 &= 0 \\ 4A_1 - 16B_1 + 2C_1 &= 0 \\ 8A_1 - 39B_1 + 7C_1 &= 0 \end{aligned} \tag{48}$$

ve

$$\begin{aligned} A_1 + 10A_2 - 47B_2 + 8C_2 &= 0 \\ 4A_2 + B_1 - 16B_2 + 2C_2 &= 0 \\ 8A_2 - 39B_2 + 7C_2 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. İkinci denklem sistemini tekrar yazalım.

$$\begin{aligned} 10A_2 - 47B_2 + 8C_2 &= -A_1 \\ 4A_2 - 16B_2 + 2C_2 &= -B_1 \\ 8A_2 - 39B_2 + 7C_2 &= -C_1 \end{aligned} \tag{49}$$

olur. (48) denklem sistemi ile (45) denklem sistemi aynı olduğundan, $A_1 = 17$, $B_1 = 6$ ve $C_1 = 14$ olabileceğini düşünebiliriz. A_1, B_1 ve C_1 hangi değerleri alırsa alsın (49) denklem sisteminin katsayılar determinantı sıfırdır. Bu nedenle, A_2, B_2 ve C_2 için belirli ve tek bir çözüm elde edilemez. Bu durumda, $A_1 = 17k_1$, $B_1 = 6k_1$ ve $C_1 = 14k_1$ değerlerini aldığını düşünebiliriz. Burada k_1 herhangi keyfi bir sayıdır. A_1, B_1 ve C_1'in bu değerlerini (49) denklem sisteminde yerine koyarsak, A_2, B_2 ve C_2 nin değerlerini k_1 cinsinden bulmuş oluruz. Bu durumda üç denklem ve dört bilinmiyen olacağından bilinmiyenlerin birisi keyfi olarak seçilir. C_2 yerine k_2 alınırsa,

$$A_2 = \frac{17k_2 - 5k_1}{14}, \qquad B_2 = \frac{2k_1 + 3k_2}{7}, \qquad C_2 = k_2$$

olur. Görülüyor ki, A_2, B_2 ve C_2 değerleri k_1 ve k_2 gibi iki keyfi sayıya bağlıdır. k_2 için "sıfır" değerini alalım. O zaman,

$$A_2 = -\frac{5}{14}k_1, \qquad B_2 = \frac{2}{7}k_1, \qquad C_2 = 0 \qquad \text{olur.}$$

şimdi de k_1 için herhangibir değer alabiliriz.

$k_1 = 7$ alınırsa, $A_2 = -10$, $B_2 = 2$, $C_2 = 0$

bulunur.

Diğer taraftan, $A_1 = 17k_1 = 17 \times 7 = 119$, $B_1 = 6 \times 7 = 42$ ve $C_1 = 14 \times 7 = 98$ olduğundan, bütün bu değerler (47) denklem sisteminde yerlerine konursa,

$$x = (119t - 10)e^{2t}, \qquad y = (42t + 2)e^{2t}, \qquad z = 98te^{2t} \tag{50}$$

elde edilir.

(iii) $\lambda_3 = 1$ değeri gözönüne alınırsa,

$x = A_3e^t$, $y = B_3e^t$, $z = C_3e^t$ bir çözümdür. Bu değerler (44) denklem sisteminde yerlerine konursa, $A_3 = 6$, $B_3 = 2$ ve $C_3 = 5$ gibi bir çözüm kolayca bulunur. Buradan,

$$x = 6e^t, \qquad y = 2e^t \qquad \text{ve} \qquad z = 5e^t \tag{51}$$

çözümü elde edilir.

(46), (50) ve (51) denklemleri biribiriyle lineer bağımsız olduklarından, verilen diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü,

$$x = \left[\, 17c_1 + c_2(119t - 10) \,\right] e^{2t} + 6c_3e^t$$

$$y = \left[\, 6c_1 + c_2(42t + 2) \,\right] e^{2t} + 2c_3e^t$$

$$z = \left[\, 14c_1 + c_2(98t) \,\right] e^{2t} + 5c_3e^t$$

bulunur.

C. Karakteristik Kökler Eşlenik Sanal

(37) numaralı denklem sistemi, normal form, homogen ve iki bilinmiyenli bir diferansiyel denklem sistemidir. Bu defa, $\lambda_1 = a + ib$ ve $\lambda_2 = a - ib$ böyle bir denklem sisteminin eşlenik-sanal iki karakteristik kökü olsun. Bu durumda iki çözüm,

$$x = A^*_1 \, e^{(a+ib)t}, \qquad y = B^*_1 \, e^{(a+ib)t}$$

ve (52)

$$x = A^*_2 \, e^{(a-ib)t}, \qquad y = B^*_2 \, e^{(a-ib)t}$$

olur. Burada açıkça görülüyor ki, bu çözümler, kompleks veya başka bir deyişle "sanal" çözümlerdir. Bizim amacımız ise sistemin "reel" çözümlerini bulmaktır. Bunun için, önce (52) çözümlerinden ilkini gözönüne alalım. Burada geçen A^*_1 ve B^*_1 kompleks sayıları, reel katsayılar cinsinden

$$A^*_1 = A_1 + iA_2 \qquad \text{ve} \qquad B^*_1 = B_1 + iB_2$$

şeklinde yazılabilir. Bu değerler yukarıda yerlerine konursa,

$$x = (A_1 + iA_2)\, e^{(a+ib)t} = (A_1 + iA_2)\,(\cos bt + i \sin bt)\, e^{at}$$

$$y = (B_1 + iB_2)\, e^{(a+ib)t} = (B_1 + iB_2)\,(\cos bt + i \sin bt)\, e^{at}$$

olur. x ve y'nin bu değerleri tekrar yazılırsa,

$$x = \left[(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + i\,(A_2 \cos bt + A_1 \sin bt) \right] e^{at}$$

(53)

$$y = \left[(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + i\,(B_2 \cos bt + B_1 \sin bt) \right] e^{at}$$

elde edilir. (53) denklemleri, verilen dif. denklem sisteminin kompleks çözüm sistemini oluşturmaktadır. Bu durumda x ve y'nin "reel" kısımları bir çözüm ve "sanal" kısımları da başka bir çözüm olacağından, sistemin aranan reel genel çözümü,

$$x = \left[c_1 (A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + c_2 (A_2 \cos bt + A_1 \sin bt) \right] e^{at}$$

(54)

$$x = \left[c_1 (B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + c_2 (B_2 \cos bt + B_1 \sin bt) \right] e^{at}$$

olur. Burada, A_1, A_2, B_1 ve B_2 belli reel sayılar, c_1 ve c_2 ise keyfi reel sabit sayılardır.

Burada önemle işaret edelim ki, karakteristik denklemin ikinci kökü olan $\lambda_2 = a - ib$ değeri gözönüne alındığında, kompleks çözüm olarak (53) denkleminde yalnız i 'nin işareti değişecektir. Sistemin aranan reel genel çözümü için hiç bir değişiklik olmıyacak ve ayni (54) genel çözümü elde edilecektir.

Örnek 1. $\frac{dx}{dt} = 4x - 2y$, $\frac{dy}{dt} = 5x + 2y$ denklem sistemini çözünüz.

Bu denklem sisteminin karakteristik denklemi,

$$\begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0$$

dır. Bu denklemin sanal ve eşlenik kökleri $\lambda_1 = 3 + 3i$ ve $\lambda_2 = 3 - 3i$ bulunur. Önce bu köklerden birincisi göz önüne alındığında,

$$x = A e^{\lambda_1 t}, \qquad y = B e^{\lambda_1 t}$$

denklem sistemi bir çözüm olur. Burada A ve B genel olarak kompleks sayılardır. Bu değerler denklem sisteminde yerlerine konursa,

$$\lambda_1 A = 4A - 2B$$

$$\lambda_1 B = 5A + 2B$$

veya

$$(\lambda_1 - 4)A + 2B = 0$$

$$-5A + (\lambda_1 - 2)B = 0$$

bulunur. $\lambda_1 = 3 + 3i$ değeri yerine konursa,

$$(-1 + 3i)A + 2B = 0$$

$$-5A + (1 + 3i)B = 0$$

elde edilir. "sıfır" çözüm takımından başka, $A = 2$, $B = 1 - 3i$ bulunur. Bu değerler yerlerine konursa kompleks çözüm,

$$x = 2e^{(3+3i)t}, \qquad y = (1 - 3i)e^{(3+3i)t}$$

olur. Bu denklemler değişik formda ve aşağıdaki şekilde yazılırsa

$$x = 2 (\cos 3t + i \sin 3t)e^{3t}$$

$$y = [\cos 3t + 3 \sin 3t) + i (-3 \cos 3t + \sin 3t)] e^{3t}$$

bulunur. Bu fonksiyon çifti, şüphesiz verilen denklem sisteminin bir kompleks çözümüdür. O zaman, bu fonksiyonların reel kısımları bir özel çözüm, sanal kısımları da ikinci bir özel çözüm olur. Öyle ise,

$$x = 2 (\cos 3t)e^{3t}$$

$$y = (\cos 3t + 3 \sin 3t)e^{3t}$$

ve

$$x = 2\,(\sin 3t)e^{3t}$$

$$y = (-3\cos 3t + \sin 3t)e^{3t}$$

sistemin birer çözümüdür. Bu fonksiyonların Wronskian'ı

$$W = \begin{vmatrix} 2\cos 3t & 2\sin 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t & -3\cos 3t + \sin 3t \end{vmatrix} \neq 0$$

dır. Öyle ise, bu fonksiyonlar aralarında lineer bağımsızdırlar. Buna göre genel çözüm,

$$x = 2\,(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t)e^{3t}$$

$$y = \left[\, c_1\,(\cos 3t + 3\sin 3t) + c_2\,(-3\cos 3t + \sin 3t)\,\right] e^{3t}$$

bulunur.

Örnek 2. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y\,, \qquad \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y$

denklem sistemini çözünüz.

Sistemin karakteristik denklemi,

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 + 4 = 0$$

ve bu denklemin kökleri $\lambda_1 = 3 + 2i$, $\lambda_2 = 3 - 2i$ bulunur. Buna göre,

$$x = A\,e^{\lambda_1 t}\,, \qquad y = B\,e^{\lambda_1 t}$$

bir özel çözümdür. Burada A ve B herhangi kompleks sayılardır. x ve y'nin bu değerleri verilen denklem sisteminde yerine konursa,

$$(3 + 2i)A = 3A - 2B$$

$$(3 + 2i)B = 2A + 3B$$

bulunur. Buradan, $A = 1$, $B = -i$ elde edilir. O zaman sistemin bir sanal çözümü,

$$x = e^{(3+2i)t}\,, \qquad y = -i\,e^{(3+2i)t}$$

olur. Euler formülü kullanılarak,

$$x = (\cos 2t + i\sin 2t)e^{3t}$$

$$y = (\sin 2t - i\cos 2t)e^{3t}$$

yazılabilir. Burada x ve y kompleks sayı olduğundan $Re\,x$ ve $Re\,y$ sistemin bir çözümünü, $Im\,x$ ve $Im\,y$ de sistemin diğer bir çözümünü verecektir. Açıkça

görülmektedir ki bu çözüm takımları, sırasıyla,

$$x = e^{3t}\cos 2t, \quad y = e^{3t}\sin 2t$$

ve

$$x = e^{3t}\sin 2t, \quad y = -e^{3t}\cos 2t$$

olur. Buna göre sistemin genel çözümü,

$$x = (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)e^{3t}$$

$$y = (c_1 \sin 2t - c_2 \cos 2t)e^{3t}$$

elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıda verilen "normal form" lineer diferansiyel denklem sistemlerini çözünüz. Burada $D = d/dt$ 'dir.

1. $Dx = -x + y, \quad Dy = -5x + 3y$
2. $Dx = 7x + 6y, \quad Dy = 2x + 6y$
3. $Dx = 6x - y, \quad Dy = 3x + 2y$
4. $Dx = 5x - y, \quad Dy = 3x + y$
5. $Dx = 2x - y, \quad Dy = 9x + 2y$
6. $Dx = 16x + 14y + 38z, \quad Dy = -9x - 7y - 18z$
   $Dz = -4x - 4y - 11z$
7. $Dx = 3x + 2y, \quad Dy = 6x - y$
8. $Dx = 5x - 4y, \quad Dy = 2x + y$
9. $Dx = 7x + 4y, \quad Dy = -x + 3y$
10. $Dx = 6x - 5y, \quad Dy = x + 2y$
11. $Dx = x - 5y, \quad Dy = 2x - y$
12. $Dx = 2x - y, \quad Dy = 3x - 2y$
13. $Dx = 2x + 3y, \quad Dy = x + 4y$
14. $Dx = -3x + 8y, \quad Dy = 2x + 3y$
15. $Dx = -x + z, \quad Dy = -y + z, \quad Dz = x + y$
16. $Dx = x - y + 4z, \quad Dy = 3x + 2y - z$
    $Dz = 2x + y - z$
17. $tDx = 2x + y, \quad tDy = -2x - 2y$
18. $tDx = 5x - y, \quad tDy = 3x + y$

7-6 VEKTÖRLER VE MATRİSLER

İki veya en fazla üç denklemden oluşan birinci mertebeden lineer (doğrusal) diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde yukarıda izlenen yol iyi sonuç vermekle birlikte, daha fazla denklemden oluşan bir diferansiyel denklem sistemi için aynı şeyi söylemek oldukça güçtür. Daha önce de değinmiş olduğumuz gibi, bu durumda **Matris Metodu** adı verilen yeni bir metod kullanılır.

Matris metodu ile lineer diferansiyel denklem sistemlerinin çözümüne geçmeden önce, vektör ve matris cebiri üzerinde bazı önbilgiler vermekte yarar vardır.

A. Temel Kavramlar

Mekanikte bir rijit cismin hareketi incelenirken vektörel fiziki büyüklüklerden söz edilir. Ömeğin, herhangibir t anında cismin bulunduğu yer

$$\mathbf{r} = r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j} + r_z\mathbf{k} \tag{55}$$

konum vektörü ile ifade edilir. Burada $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ ve $\boldsymbol{k}$ sırasıyla x, y ve z eksenleri doğrultusundaki birim vektörler ve r_x, r_y ve r_z skalar değerleri de r vektörünün eksenler doğrultusundaki bileşenleridir. r vektörü genel olarak zamana bağlı bir vektör fonksiyon ve bu vektörün bileşenleri de zamana bağlı skalar fonksiyonlardır. t'nin herhangi bir değeri için r vektörü bir sabit vektör, r_x, r_y ve r_z ise herhangi sabit reel sayılar olur.

Vektörel büyüklükler, $\boldsymbol{u, v, r, F, x, X}$, ... gibi koyu renkli harflerle gösterildikleri gibi, normal harfler üzerine oklar koymak suretiyle $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{r}$, $\vec{F}$, $\vec{x}$ şeklinde de gösterilirler.

r herhangibir sabit vektör ve r_1, r_2 ve r_3 bu vektörün üç boyutlu uzayda eksenler doğrultusundaki bileşenleri ise, r vektörü, yukarıda (55) denkleminde olduğu şekilde yazıldığı gibi ayrıca,

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) \tag{56}$$

şeklinde de yazılır. Üç boyutlu uzay yerine n- boyutlu kompleks vektör uzayı gözönüne alınırsa, o zaman r vektörünün bileşenleri $r_1, r_2, \ldots, r_n$ reel ve kompleks sayılar olmak üzere,

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \tag{57}$$

şeklinde gösterilir. (56) veya (57) denklemlerinde görüldüğü şekilde ifade edilen bir vektöre "satır vektör" veya **satır matris** adı verilir.

Yukarıda belirtilen n-bileşenli r vektörü, (57) denklemi şeklinde gösterildiği gibi, daha yaygın olarak,

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \tag{58}$$

şeklinde de gösterilir. Bu şekilde ifade edilen r vektörüne, "sütun vektör", "nx1 vektörü" veya **nx1 matrisi** denir. Görülüyor ki, herhangibir vektör bir çeşit matris'den başka birşey değildir.

Genel olarak bir matris m satır ve n sütundan meydana gelir ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{59}$$

şeklinde tanımlanır. Böyle bir matrise **mxn matrisi** denir. Burada a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$) matrisin elemanlarıdır. Bu durumda A matrisi,

$$\mathbf{A} = (a_{ij})$$

şeklinde de ifade edilmektedir.

Matrisler, genel olarak italik büyük harflerle veya koyu renkli harflerle gösterilir. Biz burada matrisleri ***A, B, C, ...*** gibi koyu renkli büyük harflerle göstereceğiz. Vektör matrisler ise, daha önce olduğu gibi ***x, u, v, r, ...*** şeklinde koyu renkli küçük harflerle gösterileceği gibi ayrıca, ***X, Y, ...*** gibi koyu renkli büyük harflerle de gösterilecektir.

Bir A matrisinde, $m = n$ ise, başka deyişle satır sayısı sütün sayısına eşit ise, bu matrise n x n matris veya ***kare matris*** denir. Örneğin,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2i \\ i+1 & 3 & -4i \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tanım 1. $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ birer mxn matrisi iseler ve bunların elemanları karşılıklı olarak birbirine eşit ise,

$A = B$ olur.

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisleri biribirine eşittir.

Tanım 2. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ ve $C = (c_{ij})$ gibi üç mxn matrisi verilmiş olsun. Eğer her $i = 1, 2, ..., m$ ve $j = 1, 2, ..., n$ için $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$ ise,

$A + B = C$ olur.

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

kare metrisleri verilmişse,

$$A + B = C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olur.

Tanım 3. $A = (a_{ij})$ bir mxn matrisi ve c herhangi bir sayı ise, bunların skalar çarpımı başka bir mxn matrisi olur.

$cA = B$

veya

$$B = cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

olur.

Bir vektörün bir sayı ile çarpımı da aynı şekilde bulunur.

$$c\mathbf{X} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Tanım 4. $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ bir *mxn matrisi* ve $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ bir *nxp* matrisi ise, bunların çarpımı

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

bir mxp matrisi olur. Burada genel olarak

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$ dır.

Yukarıda tanımlanan $\mathbf{C} = (c_{ij})$ matrisinin elemanları,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots a_{in} b_{nj}$$

olur. Burada, $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, p$'dir.

Görülüyor ki, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ çarpımının bulunabilmesi için $\boldsymbol{A}$ matrisinin kolon sayısının B matrisinin satır sayısına eşit olması gerekmektedir.

Eğer, $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ matrislerinin ikisi de birer *nxn* kare matrisi iseler, yukarıda verilen tanımlamaya göre, bunların çarpımı olan $\boldsymbol{C}$ matrisi de bir nxn kare matrisi olur. Bu durumda $\boldsymbol{C}$'nin elemanları

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$ olur.

Şimdi bu tanımlara uygun birer örnek verelim.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ise

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

Bu defa, kare matris olmayan fakat zorunlu olarak birincinin kolon sayısı ikincinin satır sayısına eşit olan,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

gibi iki matrisin çarpımını bulalım.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$$

olur.

Genel olarak, matrislerin çarpımı ve toplamı ile ilgili olmak üzere aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

(a) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

(b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

(c) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

(d) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

Aynı şekilde, $\boldsymbol{A}$ bir nxn kare matrisi, $\boldsymbol{X}$ ve $\boldsymbol{Y}$ birer $nx1$ vektörü ve c herhangi bir skalar sayı olmak üzere,

(e) $\mathbf{A}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{AX} + \mathbf{AY}$

(f) $\mathbf{A}(c\mathbf{X}) = c\,(\mathbf{AX})$

olur.

Tanım 5. Bir $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ mxn matrisi ile bir $\boldsymbol{X} = (x_i)$ $nx1$ vektörünün çarpımı yeni bir mx1 vektörünü verir. Buna göre,

$$\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$$

veya (60)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}. \qquad (60\text{ a})$$

olur. Burada dikkat edilmesi gereken husus, vektörün bileşen sayısı ile matrisin sütun sayısının aynı olması gerektiğidir.

İki matrisin çarpımı işleminin nasıl yapıldığını biliyoruz. Buna göre, (60) denklemi ile verilen çarpma işlemini tekrar ele alırsak, $Y = (y_i)$ matrisinin elemanları,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ , \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$= a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n$$

olur. Burada i'nin bütün değerleri için y_i elemanları alt alta yazılırsa,

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \end{aligned} \qquad (61)$$

bulunur.

Burada önemle ifade edelim ki, A katsayı matrisi ile Y çarpım matrisi genel olarak elemanları bizce bilinen matrislerdir. Denk. 60 'da yer alan X matrisinin elemanları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ise, bizce bilinmiyen fakat bulunmak istenen değerlerdir. X matrisinin bulunması demek bu skalar değerlerin bulunması demektir. Bu bakımdan (60) denklemi, (61) denklem sisteminin çok kısa ve kompakt şekilde yazılmasından başka birşey değildir. Başka şekilde söylemek gerekirse, (60) denklemi, (61) denklem sisteminin bir **vektör denklemi** 'dir. Bunun için, (61) denklem sistemi şeklinde bir denklem sistemi veya buna benzer şekilde bir "lineer diferansiyel denklem sistemi" ile karşılaştığımızda önce bu sisteme denk olan vektör denklemini yazmak ve sonra da çözmek amacımız olacaktır.

Matris cebirinde bazı özel matrislerin önemli yeri vardır. Birim matris veya "Identity" matris bunlardan biridir. Bu matrisi tanımlamak için, örneğin bir nxn matrisi olan (a_{ij}) matrisini gözönüne alalım. Eğer, $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$ ise ve matrisin diğer elemanları $a_{ij} = 0 \ (i \neq j)$ ise bu matrise **birim matris** denir ve I ile gösterilir. Öyle ise, bir nxn birim matrisi,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \qquad (62)$$

dır.

Buna göre, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ herhangibir nxn kare matrisi olmak üzere,

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \tag{63}$$

olur. Aynı şekilde, bir nxn matrisi olan $\boldsymbol{X}$ vektörünün $\boldsymbol{I}$ ile çarpımı gene $\boldsymbol{X}$ vektörünü verir. Bu çarpım açık olarak yazılırsa,

$$\mathbf{IX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

bulunur.

"Sıfır matris" adı verilen ve bütün elemanları "sıfır" olan matris de bir özel matristir ve $\boldsymbol{0}$ ile gösterilir. Sıfır matris için,

$$\mathbf{A0} = \mathbf{0A} = \mathbf{0}$$

ve

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

olduğu açıktır.

Eğer n- boyutlu uzayda bir vektörün bütün bileşenleri sıfır ise bu vektöre **sıfır vektör** denir ve

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$$

veya

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

Özel matrislerden bir diğeri de, bir matrisin tersi olan matrisdir. $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ bir nxn kare matris olduğuna göre, eğer

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}$$

olacak şekilde bir $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ matrisi bulunabilirse, o zaman $\boldsymbol{B}$ matrisine $\boldsymbol{A}$ matrisinin **ters matrisi** denir ve $\boldsymbol{A}^{-1}$ ile gösterilir. Bu durumda,

$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ olur.

A matrisi verildikten sonra, eğer varsa, bu matrisin tersi olan A^{-1} matrisini bulmak için değişik yollar vardır. Bu yollardan birisi kullanılarak A^{-1} bulunur.

A kare matrisi verildiğinde, A 'nın elemanları, matrisin ana köşegenine göre simetrik ise bu matrise **simetrik matris** denir. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

bir simetrik matris 'dir.

Önemli matrislerden biri de "Transpoz matris" dir. Bir $A = (a_{ij})$ matrisi verildiği zaman bu matrisin satırları ile sütunlarının yer değiştirmesi suretiyle elde edilen matris **transpoz matris** adını alır ve A^T ile gösterilir.

Yukarıda verilen tanımlamalar ve örneklerde, bir matrisin elemanlarının zamana bağlı olarak değişip değişmediğini gözönüne almadık. Örneğin, bir vektör sabit olabilir ve o zaman vektörün bileşenleri de sabit sayılar olur, veya, vektör değişken vektör olur ve o zaman da vektörün bileşenleri zamanla değişen skalar fonksiyonlar olur. Şimdi, $\Phi(t)$ böyle zamanla değişen bir $nx1$ vektörünü temsil etsin. Bu durumda,

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \\ \vdots \\ \Phi_n(t) \end{bmatrix}$$

olur. Eğer, burada $\Phi_1(t), \Phi_2(t), \ldots, \Phi_n(t)$ fonksiyonları bir [a, b] aralığında türevi alınabilir fonksiyonlar ise, o zaman $\Phi(t)$ vektör fonksiyonunun da aşağıdaki şekil-de türevi alınabilir ve böylece, t 'nin $[a, b]$ aralığındaki her değeri için tarif edilmiş olan başka bir vektör fonksiyon, örneğin $\varphi(t)$, elde edilir. Öyle ise,

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\Phi_1(t)}{dt} \\ \frac{d\Phi_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\Phi_n(t)}{dt} \end{bmatrix} = \varphi(t) \qquad \text{olur.}$$

Son olarak, çok önemli bir matrisi, "ağırlıklı matris" i tanımlamaya çalışalım. (60 a) denklem sisteminin A katsayılar matrisine yeni bir sütun olarak Y vektörünün elemanlarını ilave edersek,

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{array}\right]$$

şeklinde yeni bir matris elde edilir. Bu matrise, verilen denklem sisteminin ağırlıklı matrisi veya "Augmented" matrisi denir. Örnek olarak,

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ -4x_1 + x_2 \qquad\quad &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad -2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

denklem sistemini gözönüne alalım. Bu denklem sistemi,

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Verilen denklem sisteminin katsayılar matrisi,

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ve ağırlıklı matrisi,

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 3 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

olur.

Bir denklem sisteminin çözümünde ağırlıklı matris önemli bir rol oynar. Bu matris üzerinde bazı satır operasyonları yaparak yeni bir matris elde edilir; bu yeni matris, verilen denklem sistemine eşdeğer olan bir yeni denklem sisteminin ağırlıklı matrisi olur ve böylece denklem sistemi kolayca çözülür.

Örnek olarak,

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$
$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 = -2$$

denklem sisteminin çözümünü bulmaya çalışalım. Denklem sisteminin ağırlıklı matrisi,

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

dır. Bu matris üzerine aşağıdaki satır operasyonlarını uygulayalım.

(a) Birinci satırın elemanları 2 ile çarpılır ve ikinci satırın elemanlarından çıkartılır.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

(b) Birinci satır 3 ile çarpılır üçüncü satırdan çıkartılır.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array}\right]$$

(c) Üçüncü satır −5 ile bölünür ve sonra ikinci satır üçüncü satır ile yer değiştirir.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

(d) İkinci satır 7 ile çarpılır üçüncü satıra eklenir.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right]$$

(e) Üçüncü satır 10 ile bölünür.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Ağırlıklı matris bu şekle sokulduktan sonra yeni denklem sistemi yazılır ve x_1, x_2 ve x_3'ün değerleri buradan daha kolay şekilde bulunabilir.

Ayrıca, yukarıdaki işlemlere devam edilerek sonunda "indirgenmiş ağırlıklı matris" adı verilen matris aşağıdaki şekilde bulunur ve buradan denklem sistemi çok daha kolay şekilde çözülmüş olur.

(f) İkinci satır 2 ile çarpılır birinci satırdan çıkartılır.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

(g) Üçüncü satır 2 ile çarpılır ikinci satırdan çıkartılır.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

(h) Son olarak, üçüncü satır birinci satıra eklenir ve aranılan indirgenmiş ağırlıklı matris elde edilir.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Böylece denklem sisteminin çözümü, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ ve $x_3 = 3$ bulunur.

B. Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

$v_1, v_2, \ldots, v_m$ gibi m sayıda $mx1$ sabit vektörü verilmiş olsun. Eğer, hepsi de sıfır olmayan $c_1, c_2, \ldots, c_m$ gibi m tane sabit sayı bulunabilirse, öyle ki

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_mv_m = 0 \qquad (64)$$

dır, o zaman, $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vektörlerine aralarında **Lineer bağımlı** vektörler denir. Böyle değilse ve yalnız ve yalnız $c_1 = c_2 = \ldots c_m = 0$ için (64) denklemi gerçekleşirse, o zaman $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vektörlerine aralarında **Lineer bağımsız** vektörler denir. Bu vektörlerin "Lineer kombinasyonu" ise, yeni bir $nx1$ vektörüdür ve bu vektör $u = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_mv_m$ olarak tanımlanır.

Eğer, yukarıda olduğu gibi, herhangi m sayıda sabit vektör yerine zamana bağlı olarak değişen $\Phi_1(t), \Phi_2(t), \ldots, \Phi_m(t)$ gibi değişken vektör fonksiyonlar gözönüne alınırsa, bir $a \le t \le b$ aralığında ve bütün $t \in [a, b]$ değerleri için geçerli olmak üzere bu vektör fonksiyonlar için de yukarıdaki tanımlamalar aynen geçerlidir.

Şimdi, önce temel kavramlar sonra da lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık gibi konuları kapsayan bazı örnek problemlerin çözümüne geçebiliriz.

Örnek 1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri verildiğine göre, $C = 2A + 3B$ matrisini bulunuz.

Matrislerin her ikisi de 3x3 kare matrisidir. Buna göre,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 6 & 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \\ 12 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & 11 \\ 18 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Örnek 2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrislerinin AX çarpımını bulunuz.

A matrisinin sütun sayısı, X vektörünün elemanları sayısına eşit olduğu için bu çarpım yapılabilir.

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2 - 6 \\ -1 - 3 + 3 \\ 2 - 4 + 3 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersi olan A^{-1} matrisini bulunuz.

A matrisi $3x3$ matrisidir. Bu nedenle önce bir $3x3$ kare matrisi olan I birim matrisi bulunur.

(1) A matrisinin birinci kolonunun ilk elemanı "*1*" ve diğer elemanları "sıfır" yapılır. Bunun için birinci satır *(–3)* ile çarpılır ve ikinci satıra eklenir. Ayrıca, birinci satır *(–2)* ile çarpılır üçüncü satıra eklenir.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) İkinci satırın elemanları *1/2* ile çarpılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(3) İkinci satır birinci satıra eklenir ve ikinci satır *(–4)* ile çarpılır, üçüncü satıra eklenir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

(4) Üçüncü satır *–1/5* ile çarpılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(5) Üçüncü satır *(–3/2)* ile çarpılır, birinci satıra eklenir ve *(–5/2)* ile çarpılır ikinci satıra ilave edilir. Böylece *I* matrisi bulunmuş olur.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Şimdi ise A matrisi yerine I matrisi ele alınır, bütün bu işlemler baştan itibaren aynen tekrarlanır. O zaman,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada elde edilen sonuncu matris A^{-1} matrisidir.

Örnek 4.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

verildiğine göre A^T matrisini bulunuz.

Transpoz matrisin yukarıda verilen tanımlaması gözönüne alınarak,

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Örnek 5.

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^{t} & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^{t} & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{t} & e^{-t} & 3e^{2t} \\ -e^{t} & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 3e^{t} & -e^{-t} & -e^{2t} \end{bmatrix}$$

değişken matrisleri veriliyor.

(a) $\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{B}$ matrisini bulunuz.

(b) $\boldsymbol{AB}$ çarpımını bulunuz.

(c) $d\boldsymbol{A}/dt$ 'yi bulunuz.

(a) Burada $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ matrisleri $3x3$ kare matrisleridir.

$$\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} e^{t} + 6e^{t} \\ 2e^{t} - 3e^{t} \\ -e^{t} + 9e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-t} + 3e^{-t} \\ e^{-t} + 6e^{-t} \\ 3e^{-t} - 3e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} + 9e^{2t} \\ e^{2t} + 3e^{2t} \\ 2e^{2t} - 3e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7e^{t} & 5e^{-t} & 10e^{2t} \\ -e^{t} & 7e^{-t} & 2e^{2t} \\ 8e^{t} & 0 & -e^{2t} \end{bmatrix}$$

bulunur.

(b) İki nxn kare matrisinin çarpımını veren $\boldsymbol{C}$ matrisinin elemanları

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

olduğuna göre,

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{2t} - 2 + 3e^{3t} & 1 + 4e^{-2t} - e^{t} & 3e^{3t} + 2e - e^{4t} \\ 4e^{2t} - 1 - 3e^{3t} & 2 + 2e^{-2t} + e^{t} & 6e^{3t} + e^{t} + e^{4t} \\ -2e^{2t} - 3 + 6e^{3t} & -1 + 6e^{-2t} - 2e^{t} & -3e^{3t} + 3e^{t} - 2e^{4t} \end{bmatrix}$$

bulunur.

(c) $A(t)$ vektör matrisin türevi,

$$\frac{dA(t)}{dt} = \begin{bmatrix} e^{t} & -2e^{-t} & 2e^{2t} \\ 2e^{t} & -e^{-t} & -2e^{2t} \\ -e^{t} & -3e^{-t} & 4e^{2t} \end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 6. Aşağıda verilen,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{bmatrix}$$

vektörlerin aralarında lineer bağımlı veya lineer bağımsız olup olmadığını bulunuz.

Bunun için önce,

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$$

bağıntısını sağlayan c_1, c_2 ve c_3 sayıları bulunur.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 + 4c_3 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 \\ -c_1 + 3c_3 - 11c_3 \end{bmatrix} = 0$$

ve buradan,

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 - 4c_3 &= 0 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ -c_1 + 3c_3 - 11c_3 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar determinantı,

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{bmatrix} = 0$$

olduğundan, yukarıdaki denklem sistemini sağlayan ve hepsi de sıfır olmayan c_1, c_2, c_3 gibi sayılar bulmak mümkündür. Örneğin, $c_1 = 2$, $c_2 = -3$ ve $c_3 = -1$ sayıları denklem sistemini sağlar. Bu nedenle, yukarıda verilen v_1, v_2 ve v_3 vektörleri aralarında *"lineer bağımlı"* vektörleridir.

Örnek 7. Aşağıda verilen,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vektörlerinin aralarında lineer bağımlı veya lineer bağımsız olup olmadığını bulunuz.

Verilen değerler (64) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} c_1 - 2c_2 + c_3 \\ 2c_1 \quad - c_3 \\ c_2 + 2c_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{ve buradan,}$$

$$\begin{aligned} c_1 - 2c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 + \quad - c_3 &= 0 \\ c_2 + 2c_3 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar determinantı,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

olduğundan, ancak $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ için *(64)* denklemi sağlanır. Bu demektir ki, verilen vektörler "aralarında lineer bağımsız" vektörlerdir.

Örnek 8. Aşağıda verilen,

$$\mathbf{v}_1(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 - 3 \\ \\ 3 + 6t \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v}_2(t) = \begin{bmatrix} 2 - 2t^2 \\ \\ -2 - 4t \end{bmatrix}$$

değişken vektörleri, t 'nin hangi değerleri için aralarında lineer bağımlı olur?

Katsayılar determinantı,

$$\Delta = \begin{bmatrix} 3t^2 - 3 & 2 - 2t^2 \\ 3 + 6t & -2 - 4t \end{bmatrix} = (3t^2 - 3)(-2 - 4t) - (3 + 6t)(2 - 2t^2)$$

dır. Açıkca görülüyor ki, bu determinant, t 'nin her değeri için daima "sıfır" dır. Bunun anlamı, verilen $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ vektörleri, t 'ye bağlı olmaksızın aralarında lineer bağımlı vektörlerdir.

Örnek 9. Matris metodu kullanarak,

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= -3 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözünüz.

Verilen denklem sistemi,

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada indirgenmiş ağırlıklı matris aşağıdaki şekilde bulunarak denklem sistemi kolayca çözülür.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 8 & -3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{20}{3} & -\frac{25}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 7 & -8 \\ 0 & 7 & -20 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -69 & 81 \end{array}\right]$$

bulunur. İndirgenmiş augmented matris yardımıyla, yukarıda verilen denklem sistemine eşdeğer olan,

$$x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{4}{3}$$

$$x_2 + 7x_3 = -8$$

$$-69x_3 = 81$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan $x_3 = -27/23$ bulunur. x_3 'ün bu değeri diğer iki denklemde yerine konulur ve $x_2 = 5/23$ ve $x_1 = 43/23$ bulunur.

C. Karakteristik Değerler ve Karakteristik Fonksiyonlar

$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ bir nxn matrisi, $\boldsymbol{X}$ ve $\boldsymbol{Y}$ birer $nx1$ vektörü olmak üzere,

$$\mathbf{AX} = \mathbf{Y} \tag{60}$$

vektör denklemini yeniden gözönüne alalım. Yukarıda belirtildiği gibi, $\boldsymbol{X}$ ve $\boldsymbol{Y}$ birer $nx1$ vektörü olduğundan, λ bir orantılılık katsayısı olmak üzere,

$$\mathbf{Y} = \lambda \mathbf{X}$$

yazılır. O zaman (60) denklemi,

$$\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}$$

veya

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{X} = 0 \tag{65}$$

şeklini alır. Bu bir vektör denklemdir ve burada $\mathbf{I}$ bir nxn birim matrisidir. Bu denklem açık şekilde yazılırsa,

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right] = 0 \tag{65 a}$$

elde edilir. Görülüyor ki, (65 a) denklemi ve dolayısıyla (65) vektör denklemi, n 'inci dereceden bir çokterimli denklemidir. (65 a) denklem sisteminin "sıfır" çözümünden başka bir çözümünün bulunabilmesi için, (65) vektör denkleminin katsayı matrisi olan $(A - \lambda I)$ matrisinin determinantı "sıfır" olmalıdır. Öyle ise,

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (66)$$

yazılır. (66) denklemi, λ 'ya göre n 'inci dereceden bir cebirsel denklemdir. Bu denkleme, A matrisinin **Karakteristik denklemi** denir. Denklemin kökleri, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sayılarına da A matrisinin **Karakteristik değerleri,** "Öz değerleri" veya "eigen değerleri" denir. λ 'nın bu değerleri sıra ile (65 a) denkleminde yerine konularak her defasında $x_1, x_2, \dots, x_n$ değerleri bulunur. Böylece bulunan vektörlere de, A matrisinin **Karakteristik vektörleri** denir.

Örnek 1. Aşağıda verilen,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin karakteristik denklemini, karakteristik değerlerini ve karakteristik vektörlerini bulunuz. Verilen matrisin karakteristik denklemi,

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

veya

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \qquad (67)$$

denklemidir. Bu denklemin kökleri $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 4$ sayıları, A matrisinin karakteristik değerleridir.

Verilen matris için (65 a) denklemini tekrar yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (68)$$

elde edilir. Yukarıda bulunan λ değerleri (karakteristik değerler) ayrı ayrı (68) denkleminde yerine konularak karakteristik vektörler bulunur.

(i) $\lambda_1 = 2$ için,

$$\begin{bmatrix} 5-2 & -1 \\ 3 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

veya

$$3x_1 - x_2 = 0$$

bulunur. Buradan, $x_2 = 3x_1$ elde edilir. c, sıfır 'dan farklı herhangibir keyfi sayıyı göstermek üzere, $x_1 = c$ için $x_2 = 3c$ bulunur. Karakteristik vektörler $u^{(i)}$ ile gösterilirse, ki burada, $i = 1, 2$'dir. O zaman,

$$\mathbf{u}^{(i)} = \begin{bmatrix} c \\ 3c \end{bmatrix} \qquad (69)$$

olur. Burada c'nin herhangibir değeri için, örneğin $c = 1$ için ve $\lambda_1 = 2$ özdeğerine karşılık olan karakteristik vektör

$$\mathbf{u}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

(ii) $\lambda_2 = 4$ için,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

olur. Buradan,

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$3x_1 - 3x_2 = 0$$

bulunur. Bu denklemler birbirinden bağımsız değildir ve sonuç olarak $x_1 = x_2$ dir. O zaman, c, "sıfır" dan farklı bir sabit sayı olmak üzere,

$$\mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} c \\ \\ c \end{bmatrix}$$

olur. c 'nin herhangibir değeri için, örneğin $c = 1$ için ve $\lambda_2 = 4$ özdeğerine karşılık olan karakteristik vektör,

$$\mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 2. Aşağıda verilen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin karakteristik değerlerini ve karakteristik vektörlerini bulunuz.

Verilen matrisin karakteristik denklemi,

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

dır. Bu denklemin kökleri olan $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ ve $\lambda_3 = -1$ değerleri matrisin karakteristik değerleridir.

(i) $\lambda_1 = 2$ için,

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{70}$$

yazılır. Burada, x_1, x_2 ve x_3 değerlerini bulabilirsek, $\lambda_1 = 2$ değerine karşılık olan karakteristik vektörü bulmuş oluruz.

(70) denklem sistemini çözebilmek için, ağırlıklı matris üzerine bazı satır operasyonları uygulayarak indirgenmiş ağırlıklı matris bulunur. Bunun için sıra ile aşağıdaki işlemler yapılır.

(1) İkinci satır *2* ile çarpılır ve birinci satır buna eklenir.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

(2) Üçüncü satır *2* ile çarpılır ve birinci satır buna eklenir.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

(3) İkinci ve üçüncü satırlar ayrı ayrı *3* ile bölünür.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

(4) İkinci satır üçüncü satıra eklenir ve birinci ve ikinci satırın elemanları *−1* ile çarpılır.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Denk. 70 şimdi tekrar yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan,

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

elde edilir. Görülüyor ki, $x_1 = x_2 = x_3 = c$ elde edilir. c 'nin herhangi bir değeri için, örneğin $c = 1$ için, $\lambda_1 = 2$ özdeğerine karşılık olan karakteristik vektör,

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{bulunur.}$$

(ii) $\lambda_2 = -1$ için, (65 a) denklemi

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

şeklini alır. Bu demektir ki, bu üç bilinmeyenden ikisi herhangi sayılar olarak seçilir ve üçüncüsü buna bağlı olarak bulunur. Örneğin, $x_1 = 1$ ve $x_2 = 0$ olursa, $x_3 = -1$ olur. O zaman $\lambda_2 = -1$ özdeğerine karşılık olarak karakteristik vektör,

$$\mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Burada $\lambda_3 = \lambda_2$ olduğundan,

$$\mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 3.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin karakteristik değerlerini ve karakteristik vektörlerini bulunuz.

Verilen matrisin karakteristik denklemi,

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) + 2(1+\lambda) = 0$$

veya,

$$(1+\lambda)(-\lambda^2 + \lambda + 2) = 0$$

olur. Bu denklemin kökleri, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ bulunur. Eğer, $X = (x_1, x_2, x_3)$ vektörü bu matrisin bir karakteristik vektörü ise,

$$\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}$$

vektör denkleminin gerçekleşmesi gerekir. Buna göre,

(i) $\lambda_1 = 2$ için,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

yazılır. Buradan,

$$x_3 = 2x_1$$

$$-x_2 = 2x_2$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2x_3$$

bulunur. Görülüyor ki, $x_2 = 0$ ve $2x_1 = x_3$ dür. $x_1 = c$ alınırsa, verilen matrisin bir parametreli karakteristik vektör ailesi,

$$\mathbf{u}^{(i)} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 2c \end{bmatrix}$$

bulunur.

(ii) $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ için,

denklem sisteminin kökleri, $x_1 = c$, $x_2 = 0$ ve $x_3 = -c$ bulunur. O zaman, matrisin diğer karakteristik vektörler ailesi,

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{(3)} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ -c \end{bmatrix}$$

ALIŞTIRMALAR

1. **A, B, C, D, E** matrisleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ & \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Buna göre aşağıdaki matrislerin herbirini bulunuz.

(a) $5\mathbf{B}$ (b) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (c) $2\mathbf{B}(\mathbf{A} + 3\mathbf{C})$

(d) $\mathbf{AB}$ (e) $2\mathbf{CE}$ (f) $\mathbf{A}(\mathbf{BE})$

(g) $\mathbf{B}^T$ (h) $\mathbf{C}^T$

2. Aşağıda verilen matrislerin tersi matrislerini bulunuz.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ & \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ & \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. Aşağıda verilenlerin herbiri için $\mathbf{AX}$ çarpımını bulunuz.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

verildiğine göre,

(a) **AB** ve (b) **BA**

çarpımlarını bulunuz. Bu çarpımlar eşit midir?

5. Aşağıda verilenlerin herbiri için $\Phi(t)$ vektör fonksiyonunun türevini bulunuz.

(a) $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ 3t + 2 \\ t^3 + t^2 - 1 \end{bmatrix}$, (b) $\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 3 \sin t \\ t \sin 3t \end{bmatrix}$

(c) $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & -2e^{-t} & e^{3t} \\ te^t & 3e^{-t} & 2e^{3t} \\ -e^t & -e^{-t} & te^{3t} \end{bmatrix}$

6. Aşağıda verilen vektörlerin aralarında lineer bağımlı veya lineer bağımsız olup olmadığını bulunuz.

(a) $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

(c) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

matrislerinin aralarında satır eşdeğer matrisler olduğunu gösteriniz.

8. $AX = Y$ vektör denkleminin indirgenmiş ağırlıklı matrisi.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

ise, denklem sisteminin köklerinin $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -9$ ve $x_4 = 8$ olduğunu gösteriniz.

9. Aşağıda verilen denklem sistemlerinin önce ağırlıklı matrislerini yazınız, sonra da indirgenmiş ağırlıklı matrisleri bularak denklem sistemlerini çözünüz.

(a) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$

(b) $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$
$-2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$
$4x_1 - 5x_2 + 8x_3 = -3$

(c) $x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$
$2x_1 + 5x_3 = 2$
$-3x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$

10. Aşağıda verilen matrislerin karakteristik denklemlerini, karakteristik değerlerini ve karakteristik vektörlerini bulunuz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

7-7 BİRİNCİ MERTEBE LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN MATRİS METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Herbiri, serbest değişken t 'nin fonksiyonları olan $x_1, x_2, ..., x_n$ gibi n sayıda bilinmeyen fonksiyon ve her defasında bu fonksiyonlardan yalnız birinin birinci mertebeden türevini içeren n sayıda lineer (doğrusal) diferansiyel denklemden oluşan ve aşağıdaki şekilde verilen bir denklem sistemini gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n + F_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n + F_2(t) \\
&\cdots\cdots\cdots

Burada görülen $a_{ij}(t)$ ve $F_i(t)$ skalar fonksiyonları $(i = 1, 2, ..., n$ ve $j = 1, 2, ..., n)$ verilen bir $a \le t \le b$ reel aralığında t 'nin her değeri için süreklidir. Eğer, bu aralıkta bütün t değerleri için $F_i(t) = 0$ ise, $(i = 1, 2, ..., n)$ (71) denklem sistemine, **homogen denklem sistemi** eğer böyle değilse, bu sisteme **homogen olmayan denklem sistemi** denir.

Yukarıda verilen denklem sistemi, kısaca ve kompakt formda,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + F_i(t) \qquad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (71\ a)$$

şeklinde yazılabilir.

(71) denklem sistemini vektör ve matris notasyonu kullanarak daha kompakt şekilde yazmak mümkündür. Bunun için, denklem sisteminde verilen $x_1, x_2, ..., x_n$ fonksiyonlarının bir $X(t)$ $nx1$ kolon vektörünün bileşenleri ve $F_1(t), F_2(t), ..., F_n(t)$ fonksiyonlarının da bir $F(t)$ $nx1$ vektörünün bileşenleri olduğu düşünülürse, bu denklem sistemi

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t) \qquad (72)$$

şeklinde yazılır.

Birinci mertebeden bir doğrusal denklem sistemi verildiğinde ilk iş, bu denklem sistemine eşdeğer olan böyle bir vektör diferansiyel denklemi yazmak olacaktır. Burada, $A(t)$ nxn kare matrisi, denklemin **katsayılar matrisi** adını alır. (71) denklem sisteminde görülen $a_{ij}(t)$ fonksiyonları ise katsayılar matrisinin elemanlarıdır.

Yukarıda belirtildiği üzere, (72) denklemi, verilen denklem sistemine eşdeğer olan bir vektör diferansiyel denklemdir. Başka bir deyişle, denklem sistemi, vektör diferansiyel denklemin skalar formda yazılmış bir şeklinden başka birşey değildir.

(72) denklemi bir vektör diferansiyel denklem olduğu için bunun herhangibir çözümü de doğal olarak $nx1$ kolon vektörü olacaktır. O zaman yukarıda tarif edilen $a \le t \le b$ reel aralığında t 'nin her değeri için tarif edilmiş olan ve (72) diferansiyel denklemini sağlayan bu $X = \Phi(t)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri olan

$$x_1 = \Phi_1(t)$$
$$x_2 = \Phi_2(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n = \Phi_n(t)$$

skalar fonksiyonları birlikte, (71) diferansiyel denklem sistemini sağlar ve bu fonksiyonların türevleri $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli fonksiyonlar olur. Ayrıca $\mathbf{X} = \Phi(t)$ fonksiyonu başlangıç şartlarını da sağlar. $a \leq t \leq b$ aralığında t'nin bir t_0 değeri için $\mathbf{X}$'in aldığı değer $\mathbf{C} = \Phi(t_0)$ sabit $nx1$ vektörü ile gösterilirse $c_1, c_2, \ldots, c_n$ bu vektörün bileşenleri olmak üzere

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{73}$$

olur.

Lineer diferansiyel denklem sistemleri arasında (71) diferansiyel denklem sisteminin özel bir yeri vardır. Çünkü, n'inci mertebeden değişken katsayılı ve homogen olmayan lineer bir diferansiyel denklem gözönüne alacak olursak, açıkça görülür ki böyle bir denklem, birinci mertebeden n bilinmeyenli ve n denklemden oluşan reel bir denklem sistemine eşdeğerdir. Bu nedenle, (71) diferansiyel denklem sistemi çok önemlidir ve anlamı çok geniştir.

Şimdi (72) denklemine geri dönelim. Hemekadar bu denklem bir vektör diferansiyel denklem ise de, Bölüm 2 'de görülen

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

şeklindeki skalar denklem ile şekil bakımından büyük benzerlik içindedir. Bu durum bize, adı geçen (72) denkleminin çözümünün bulunmasında önemli bir ipucu vermektedir.

(72) denkleminde eğer $F(t) = 0$ ise, o zaman bu denklem

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} \tag{74}$$

şeklini alır. Daha önce değinmiş olduğumuz gibi, böyle bir denklem birinci mertebeden lineer ve homogen bir vektör diferansiyel denklemidir. Burada önce (74) denkleminin çözümünü ele alacağız.

Biraz önce değindiğimiz gibi, önceki bölümlerde gördüğümüz sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemlerin çözümleri gözönüne alınırsa (74) denkleminin

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{u}e^{\lambda t} \tag{75}$$

şeklinde bir çözümü olacağı anlaşılır. Burada λ bir sabit sayı ve u, "sıfır vektörü" dışında bir "sabit" vektördür.

(75) denklemi ile verilen $X(t)$ fonksiyonu ve türevi, (74) numaralı vektör diferansiyel denklemde yerine konursa,

$$\frac{dX}{dt} = \lambda e^{\lambda t} u$$

$$\lambda e^{\lambda t} u = e^{\lambda t} Au$$

veya

$$(A - \lambda I)u = 0 \qquad (76)$$

elde edilir. Açıkca görülüyor ki bu denklem önceden gördüğümüz (65) denklemi ile tam bir benzerlik içindedir. Öyle ise, Denk. 76 'nin, (74) numaralı birinci mertebeden lineer ve homogen vektör diferansiyel denkleminin bir çözümü olması için bu denklemlerde görülen u sabit vektörünün bir karakteristik vektör olması gerekmektedir.

Katsayılar matrisi bir nxn matrisi olduğuna göre bunun, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ gibi n-sayıda karakteristik değeri olduğunu biliyoruz. Her karakteristik değere karşılık karakteristik vektör bulunduğundan, $A(t)$ matrisinin $u^{(1)}, u^{(2)}, ..., u^{(n)}$ gibi n sayıda karakteristik vektörü vardır ve bu vektörler kendi aralarında lineer bağımsızdır. Bu demektir ki, (74) diferansiyel denkleminin n- sayıda özel çözümü vardır. Bu çözümler genel olarak,

$$X^{(i)} = e^{\lambda_i t} u^{(i)} \qquad (i = 1, 2, ..., n) \quad \text{şeklinde yazılır.} \qquad (77)$$

Burada yeniden ve açıkça vurgulamakta yarar vardır ki, herhangi bir i değeri için (77) fonksiyonu, bileşenleri

$$x_{1i} = \Phi_{1i}(t)$$

$$x_{2i} = \Phi_{2i}(t)$$

$$x_{ni} = \Phi_{ni}(t)$$

skalar fonksiyonları olan bir $nx1$ vektöründen başka birşey değildir.

(77) fonksiyonlarının herbiri kendi aralarında lineer bağımsız oldukları için $c_1, c_2, ..., c_n$ sayıları, reel veya kompleks n- keyfi sayı olmak üzere, bunların lineer kombinasyonu olan,

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} u^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} u^{(2)} + ... + c_n e^{\lambda_n t} u^{(n)} \qquad (78)$$

fonksiyonu, (74) denkleminin genel çözümünü verir.

Bir nxn kare matrisi olan $\boldsymbol{A}$ katsayılar matrisinin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ karakteristik değerleri üç ayrı grupta toplanabilir.

(i) Bütün karakteristik değerler birbirinden farklı, pozitif veya negatif reel sayılardır.

(ii) Bazı karakteristik değerler, eşlenikleri ile birlikte eşlenik kompleks sayı çiftleri şeklinde olabilir.

(iii) Bazı karakteristik değerler tekrar eden sayılar olabilir.

Birinci grupta hiçbir güçlükle karşılaşılmaz. Her karakteristik değer için bir karakteristik vektör ve dolayısıyla bir özel vektör çözüm elde edilir. Bu çözümler aralarında lineer bağımsız olduklarından denklem sistemini sağlayan bir genel çözüm kolayca bulunur.

İkinci olarak bazı karakteristik değerlerin biri diğerinin eşleniği olacak şekilde ve tekrarlanmayan kompleks sayı çiftleri şeklinde olması halinde yine bir güçlükle karşılaşılmaz. Burada dikkat edilecek husus, karakteristik değer bir kompleks sayı ise, buna karşılık olan karakteristik vektör de bir kompleks vektördür. Daha önceki bölümlerde gördüğümüz gibi, böyle durumlarda genel çözümün nasıl elde edileceği ileride bir örnekle açıklanacaktır.

Üçüncü olarak, bazı karakteristik değerlerin tekrar etmesi, yani katlı olması durumudur. O zaman, aralarında lineer bağımsız olan karakteristik vektörlerin sayısı, karakteristik değerler sayısından az olduğunda bir önemli güçlükle karşılaşılır.

Örneğin, karakteristik denklemin bir λ_0 kökü $m = 3$ defa tekrar etmiş olsun. Burada m'ye **kat değeri** denir. O zaman, önceki bölümlerde gördüğümüz şekilde,

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{X}$$

vektör diferansiyel denkleminin, tekrar eden karakteristik değerle ilgili olarak,

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{B}_{11}e^{\lambda_0 t}$$

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{B}_{21}te^{\lambda_0 t} + \mathbf{B}_{22}e^{\lambda_0 t}$$

$$\mathbf{X}^{(3)} = \mathbf{B}_{31}t^2e^{\lambda_0 t} + \mathbf{B}_{32}te^{\lambda_0 t} + \mathbf{B}_{33}e^{\lambda_0 t}$$

özel çözümleri bulunur. Bunlar aralarında lineer bağımsız çözümlerdir. Burada B_{ij}, i ve j'nin her değeri için ayrı ayrı bulunması gereken bir vektördür.

Şimdi tekrar geriye dönelim ve (77) denklemini aşağıda görüldüğü gibi değişik şekilde yazalım.

$$X^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \\ x_{ni}(t) \end{bmatrix}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

olur. Yukarıda belirtildiği üzere, herhangibir *(i)* değeri için, bu skalar fonksiyonlar, hep birlikte diferansiyel denklemin bir çözüm takımını oluştururlar. Sonuç olarak n-sayıda çözüm takımı vardır ve tüm olarak bunların Wronskian 'ı aşağıdaki şekilde yazılır.

$$W[X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}] = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \qquad (79)$$

Önceden biliyoruz ki, bir diferansiyel denklemin genel çözümünün bulunmasında Wronskian 'ın hesaplanması büyük önem taşır. Eğer verilen $a \leq t \leq b$ aralığında t 'nin hiçbir değeri için Wronskian "SIFIR" değilse, ancak o zaman bu fonksiyonlar aralarında lineer bağımsızdır. Aralarında lineer bağımsız olan fonksiyonların lineer kombinasyonu da genel çözümü verir.

Örnek 1. Aşağıda verilen,

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 3x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2$$

denklem sistemini çözünüz.

Denklem sistemi matris form 'da yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

olur. Katsayılar matrisinin karakteristik denklemi,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

veya

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

olduğundan, karakteristik (eigen) değerler, $\lambda = \pm 2$ bulunur. Bu değerler ayrı ayrı (76) denkleminde yerine konursa, karakteristik vektörler,

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada (78) denklemi gözönüne alındığında, verilen diferansiyel denklemin genel çözümü aşağıdaki şekilde olur.

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Örnek 2. $\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + x_2$$

denklem sistemini çözünüz.

Denklem sistemi, matris formda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

olur. Katsayılar matrisinin karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

ve bu denklemin kökleri $\lambda_1 = 3$ ve $\lambda_2 = -1$ olduğundan, bu değerler ayrı ayrı (76) denkleminde yerine konursa, karakteristik vektörler,

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

bulunur. Karakteristik vektörler bulunduktan sonra, diferansiyel denklem sisteminin aralarında lineer bağımsız herhangi iki vektör çözümü,

$$\mathbf{X}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu durumda genel çözüm,

$$\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{X}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{X}^{(2)}(t)$$

veya

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 3:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 2x_1 + x_2 + x_3$$

denklem sistemini çözünüz.

Katsayılar matrisinin karakteristik denklemi,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

veya,

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$$

dır. Buradan, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ ve $\lambda_3 = 4$ bulunur.

Önce, $\lambda_1 = 1$ özdeğeri (76) denkleminde yerine konursa,

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\,\mathbf{u}^{(1)} = 0$$

veya

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} = 0$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin bir çözümü, $u_{11} = 1$, $u_{21} = -2$ ve $u_{31} = 1$ dir. Böylece, $\lambda_1 = 1$ için bir karakteristik vektör,

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Aynı şekilde, $\lambda_2 = -1$ ve $\lambda_3 = 4$ özdeğerlerine karşılık olan karakteristik vektörler bulunur. Sonuç olarak; diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

elde edilir.

Örnek 4. Aşağıda verilen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 - x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 4x_1 + x_2 - 4x_3$$

homogen diferansiyel denklem sistemini çözünüz.

Denklem sistemi matris formda yazılırsa, x_1, x_2 ve x_3 bilinmeyenlerinin herbiri, vektör çözüm olan X'in birer bileşeni olacaktır. Buna göre,

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix} X \quad \text{ve} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{80}$$

yazılır. Burada,

$$X = ue^{\lambda t}$$

bu denklemin bir vektör çözümü olsun. O zaman u_1, u_2 ve u_3 skalar değerleri karakteristik vektör u'nin bileşenleri olmak üzere,

$$x_1 = u_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = u_2 e^{\lambda t}, \quad x_3 = u_3 e^{\lambda t}$$

olur. Bu değerler, verilen diferansiyel denklem sisteminde yerine konursa,

$$\begin{aligned} u_1\lambda &= u_1 + u_2 - u_3 \\ u_2\lambda &= 2u_1 + 3u_2 - 4u_3 \\ u_3\lambda &= 4u_1 + u_2 - 4u_3 \end{aligned} \tag{81}$$

veya

$$\begin{aligned} (1-\lambda)u_1 + u_2 - u_3 &= 0 \\ 2u_1 + (3-\lambda)u_2 - 4u_3 &= 0 \\ 4u_1 + u_2 + (-4-\lambda)u_3 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. u_1, u_2, u_3 cinsinden verilen (81) denklem sisteminin "sıfır" dan farklı bir çözümünün bulunabilmesi için,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ 4 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Buradan,

$$\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$$

elde edilir. Böylece bulunan karakteristik denklemin kökleri, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = -3$ dür. Bu değerler ayrı ayrı gözönüne alınarak katsayılar matrisinin üç karakteristik vektörü, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ ve $u^{(3)}$ aşağıdaki şekilde bulunur.

$\lambda_1 = 1$ için,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur. Bu denklem sisteminin çözümünden $u_{11} = u_{21} = u_{31} = 1$ bulunur. Buradan

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Aynı şekilde, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = -3$ için, sıra ile,

$$\mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece (80) denkleminin üç özel çözümü,

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(3)} = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ 7e^{-3t} \\ 11e^{-3t} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bunların, lineer kombinasyonu genel çözümü verir.

$$X = c_1 \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ 7e^{-3t} \\ 11e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Diferansiyel denklem sisteminin x_1, x_2 ve x_3 fonksiyonlarının herbiri X 'in bileşenleri olduğu için bunlar cinsinden genel çözüm,

$$x_1 = c_1e^{t} + c_2e^{2t} + c_3e^{-3t}$$
$$x_2 = c_1e^{t} + 2c_2e^{2t} - 7c_3e^{-3t}$$
$$x_3 = c_1e^{t} + c_2e^{2t} + 11c_3e^{-3t}$$

elde edilir.

Örnek 5. $\dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3x_2 - 3x_3$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 3x_2 - x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_1 + x_2 + 3x_3$$

homogen, lineer diferansiyel denklem sistemini çözünüz.

Denklem sistemi önce matris formda yazılır.

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} X, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Katsayılar matrisinin karakteristik denklemi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & 3 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

Buradan,

Karakteristik denklemin kökleri, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 2$ bulunur. Görülüyor ki, köklerden ikisi birbirinin aynıdır; başka bir deyişle, 2 sayısı, katsayılar matrisinin tekrar eden bir karakteristik değeridir.

(i) $\lambda_1 = 1$ için,

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} = 0$$

yazılır. Buradan, $u_{11} = 3$, $u_{21} = 1$, $u_{31} = 1$ bulunur.

(ii) $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ için,

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0$$

yazılır. Buradan, u_1, u_2 ve u_3'ün cinsinden ve birbirinin tamamen aynı üç denklem elde edilir. Bu denklemler birbirinden bağımsız değildirler. Bunlardan biri alınırsa,

$$-u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

olur. Açıkça görülüyor ki, bu denklemin birbirinden farklı iki çözümü vardır. Bileşenleri $u_1 = 0$, $u_2 = -1$, $u_3 = 1$ olan karakteristik vektör ile, bileşenleri $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$ olan karakteristik vektör, aralarında lineer bağımsız olan iki vektördür. Sonuç olarak, üç karakteristik değer ve birbiri ile aralarında lineer bağımsız üç karakteristik vektör elde edilir. O zaman, vektör diferansiyel denkleminin genel çözümü,

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{bmatrix} 3e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

bulunur. Verilen diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü ise,

$$x_1 = 3c_1e^{t} + c_3e^{2t}$$

$$x_2 = c_1e^{t} - c_2e^{2t}$$

$$x_3 = c_1e^{t} + (c_2 + c_3)e^{2t}$$

olur.

Örnek 6. $\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2$$

denklem sistemini çözünüz.

Katsayılar matrisinin karakteristik denklemi,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4 = 0$$

ve bu denklemin kökleri, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ dir. Tekrar eden bir karakteristik değer olan 2 sayısı, 2 defa katlı bir değerdir. Bu sayı

$$(\mathbf{A} - \lambda\, \mathbf{I})\, \mathbf{u} = 0$$

denkleminde yerine konursa,

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Buradan, $u_1 + u_2 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklem bize bir tek karakteristik vektör ve bunun sonucu olarak, aşağıdaki şekilde

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

bir tek özel çözüm verir. Genel çözümü bulabilmek için ise aralarında lineer bağımsız iki özel çözümün bulunması gerekmektedir.

Sabit katsayılı, ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin çözümünden hatırlıyoruz ki,

$$\mathbf{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

şeklinde bir özel çözüm, burada aradığımız ikinci özel çözüm olabilir. Bu çözüm,

$$x_1 = B_1te^{2t} + C_1e^{2t}$$

$$x_2 = B_2te^{2t} + C_2e^{2t}$$

şeklinde yazılabilir. Bu değerler, denklem sisteminde yerine konursa,

$$B_1e^{2t} + 2B_1te^{2t} + 2C_1e^{2t} = B_1te^{2t} + C_1e^{2t} - B_2te^{2t} - C_2e^{2t}$$

$$B_2e^{2t} + 2B_2te^{2t} + 2C_2e^{2t} = B_1te^{2t} + C_1e^{2t} + 3B_2te^{2t} + 3C_2e^{2t}$$

elde edilir. Buradan,

$$(B_1 + B_2)te^{2t} + (B_1 + C_1 + C_2)e^{2t} = 0$$

$$(-B_1 - B_2)te^{2t} + (B_2 - C_1 - C_2)e^{2t} = 0$$

yazılır. Sonuç olarak,

$$B_1 + B_2 = 0$$

$$B_1 + C_1 + C_2 = 0$$

$$B_2 - C_1 - C_2 = 0$$

bulunur. Keyfi olarak, $B_1 = 1$ ve $C_1 = 0$ seçilirse, $B_2 = -1$ ve $C_2 = -1$ elde edilir. O zaman,

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

bulunur. Genel çözüm,

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \right)$$

elde edilir.

Örnek 7. $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X$

denklemini çözünüz.

Diferansiyel denklemin katsayılar matrisinin karakteristik denklemi,

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0$$

dır. Görülüyor ki, $\lambda = 1$ sayısı, iki defa tekrar eden bir karakteristik değerdir.

$\lambda = 1$ sayısına karşılık olan karakteristik vektörlerde birinin bileşenleri u_1 ve u_2 aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0, \quad u_1 + u_2 = 0$$

Burada, $u_1 = 1$ seçilirse $u_2 = -1$ olur ve diferansiyel denklemin bir çözümü

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$$

bulunur.

Diferansiyel denklemin ikinci özel çözümü,

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} e^t$$

şeklinde bir vektördür. Bu çözüm, diferansiyel denklemde yerine konursa,

$B_1 + B_2 = 0$

$B_1 + 3(C_1 + C_2) = 0$

elde edilir. Burada, $B_1 = 3$ ve $C_1 = 0$ seçilirse, $B_2 = -3$ ve $C_2 = -1$ bulunur. Yerlerine konursa,

$$\mathbf{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ \\ -3 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 0 \\ \\ -1 \end{bmatrix} e^t$$

elde edilir. Denklemin genel çözümü,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}^{(1)} + c_2\mathbf{X}^{(2)}$$

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left(\begin{bmatrix} 3 \\ \\ -3 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 0 \\ \\ -1 \end{bmatrix} e^t \right) \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 8. $\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2$, $\dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 - 3x_2$ sistemini çözünüz.

Karakteristik denklem,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

dır. Bu denklemin kökleri $\lambda_1 = -1 + i$ ve $\lambda_2 = -1 - i$ gibi iki eşlenik kompleks sayıdır. Kolayca bulunabilir ki, iki özel çözüm,

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 2-i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 2+i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}$$

dır. Bu çözümlerden yalnız birisinin reel ve kompleks kısımları ayrı ayrı yazılırsa,

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 2-i \end{bmatrix} e^{-t} (\cos t + i \sin t)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t \\ 2e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\sin t \end{bmatrix}$$

elde edilir. Önceden biliyoruz ki, burada $X^{(1)}$ in reel kısmı ve sanal kısmı

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

denkleminin birer özel çözümüdür. Bunların Wronskian'ı hesaplanırsa, sıfır 'dan farklı olduğu görülür. Bu demektir ki, bu iki fonksiyon aralarında lineer bağımsız olduklarında, genel çözüm,

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{bmatrix} e^{-t}$$

olur.

Örnek 9. $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} X$

denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 4\right] = 0$$

veya

$$(1-\lambda)\ (1-\lambda) + 2i\ (1-\lambda) - 2i = 0$$

dır. Buradan,

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 1 - 2i, \qquad \lambda_3 = 1 + 2i$$

bulunur.

(i) $\lambda_1 = 1$ için,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0$$

yazılır. Buradan, $u_1 - u_3 = 0$ ve $3u_1 + 2u_2 = 0$ gibi iki denklem elde edilir. $u_1 = u_3 = 2$, $u_2 = -3$ bir çözümdür. Öyle ise, diferansiyel denklemin bir özel çözümü,

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2e^t \\ -3e^t \\ 2e^t \end{bmatrix}$$

olur.

İkinci olarak, eşlenik-kompleks karakteristik değerlerden birisi alınır ve buna karşılık olan karakteristik vektör bulunur.

(ii) $\lambda_2 = 1 - 2i$ için,

$$\begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 2 & 2i & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0$$

yazılır. Buradan, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = i$ bulunur. Görülüyor ki, diferansiyel denklemin bir diğer özel çözümü,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(1-2i)t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} e^t (\cos 2t - i \sin 2t)$$

elde edilir. Bu çözüm tekrar yazılırsa,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} e^t + i \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} e^t$$

elde edilir. Bu bir kompleks çözümdür. Burada $\mathbf{X}$'in reel kısmı ve sanal kısmı ayrı ayrı ve biribirinden farklı iki çözümdür. Şimdi her üç özel çözüm birlikte gözönüne alınır ve Wronskian'ı hesaplanırsa,

$$W = \begin{vmatrix} 2e^{t} & 0 & 0 \\ -3e^{t} & e^{t}\cos 2t & -e^{t}\sin 2t \\ 2e^{t} & e^{t}\sin 2t & e^{t}\cos 2t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & \cos 2t & -\sin 2t \\ 2 & \sin 2t & \cos 2t \end{vmatrix} e^{t} = 2e^{t}$$

bulunur. Bu demektir ki, Wronskian hiçbir zaman sıfır olamaz. Öyle ise, her üç çözüm aralarında lineer bağımsızdır ve diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} e^{t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} e^{t} \quad \text{olur.}$$

Örnek 10. Aşağıda verilen ve başlangıç şartı verilmiş olan denklemi çözünüz.

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \qquad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Diferansiyel denklemi çözmek için önce karakteristik değerler bulunur.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^{2} + 6\lambda + 9 = 0$$

Buradan, $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0, \qquad \mathbf{X}^{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

Karakteristik değerler tekrar ettiği için, ikinci özel çözüm,

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \\ B_2 \end{bmatrix} te^{-3t} + \begin{bmatrix} C_1 \\ \\ C_2 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

şeklinde bir vektör fonksiyondur. Bu çözüm,

$$x_1 = B_1te^{-3t} + C_1e^{-3t}$$
$$x_2 = B_2te^{-3t} + C_2e^{-3t}$$

şeklinde tekrar yazılır ve bu değerler denklem sisteminde yerlerine konursa,

$$B_1e^{-3t} - 3B_1te^{-3t} - 3C_1e^{-3t} = B_1te^{-3t} + C_1e^{-3t} - 4B_2te^{-3t} - 4C_2e^{-3t}$$
$$B_2e^{-3t} - 3B_2te^{-3t} - 3C_2e^{-3t} = 4B_1te^{-3t} + 4C_1e^{-3t} - 7B_2te^{-3t} - 7C_2e^{-3t}$$

elde edilir. Tekrar düzenlenirse,

$$4(B_1 - B_2)te^{-3t} + (4C_1 - 4C_2 - B_1)e^{-3t} = 0$$
$$4(B_1 - B_2)te^{-3t} + (4C_1 - 4C_2 - B_2)e^{-3t} = 0$$

yazılır. Buradan,

$$B_1 - B_2 = 0$$
$$4C_1 - 4C_2 - B_1 = 0$$
$$4C_1 - 4C_2 - B_2 = 0$$

bulunur. $B_1 = B_2 = 4$ ve $C_2 = 0$ seçilirse, $C_1 = 1$ olur. O zaman,

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ \\ 4 \end{bmatrix} te^{-3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

bulunur. Böylece, diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 4 \\ \\ 4 \end{bmatrix} te^{-3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t} \right)$$

elde edilir.

X 'in bileşenleri cinsinden genel çözüm bulunmak istenirse aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$x_1 = c_1 + (4t + 1)\, c_2\, e^{-3t}$$

$$x_2 = c_1 + 4t\ \ c_2\ e^{-3t}$$

Burada, başlangıç şartları kullanılırsa,

$$3 = c_1 + c_2$$

$$2 = c_1$$

elde edilir. Buradan, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$ bulunur. Böylece, başlangıç şartlarını sağlayan genel çözüm,

$$X = \begin{bmatrix} 3 + 4t \\ \\ 2 + 4t \end{bmatrix} e^{-3t}$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıda verilen birinci mertebeden homogen ve lineer diferansiyel denklem sistemlerini çözünüz.

1. $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X$

2. $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} X$

3. $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} X$

4. $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \\ 1 & 4 \end{bmatrix} X$

5. $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X$

6. $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X$

7. $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}$

8. $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{X}$

Aşağıda başlangıç şartları verilen denklem sistemlerini çözünüz.

9. $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

10. $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

BÖLÜM 8

Laplace Dönüşümü

8-1 GİRİŞ

Bu bölümde birçok mühendislik probleminin modellendiği başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde yararlı bir dönüşüm olan Laplace dönüşümünü inceleyeceğiz. Laplace dönüşümü, bir reel sayı olan t serbest değişkenine bağlı bir F- fonksiyonunu yine reel bir sayı olan s parametresine bağlı bir f- fonksiyonuna dönüştürür. Burada hemen ifade edelim ki, F- fonksiyonu tek bir t- değişkenine bağlı bir fonksiyon olduğu gibi birden fazla serbest değişkene bağlı bir fonksiyon da olabilir. F- fonksiyonunun tek değişkenli olması durumunda karşılaşılan başlangıç değer problemi, Laplace dönüşümü ile s parametresini içeren bir cebirsel probleme dönüşür.

Bu bölümde önce Laplace dönüşümü hakkında genel bir bilgi vereceğiz. Daha sonra da, başlangıç değer probleminden Laplace dönüşümü ile bir cebirsel denklem elde etmeyi ve buradan da başlangıç değer probleminin çözümüne geçmeyi öğreneceğiz. Ayrıca Bölüm (11-8) de Laplace dönüşümü kullanılarak kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü konusu ele alınacaktır.

8-2 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Tanım 1. F fonksiyonu reel bir değer olan t serbest değişkeninin integrali alınabilen bir fonksiyonu olsun. Ayrıca, $t > 0$ olmak üzere reel bir sayı olan s parametresinin fonksiyonu olan bir f- fonksiyonunu göz önüne alalım.

Bu fonksiyon,

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt \qquad (1)$$

şeklinde tarif edilir. Eğer, s nin bütün değerleri için (1) eşitliği sağlanabiliyorsa, o zaman f- fonksiyonuna F- fonksiyonunun **Laplace Dönüşümü** adı verilir ve genel olarak,

$f(s) = L\{F(t)\}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1. $F(t) = 1,\ t > 0$ fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$L\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1\, dt = \lim_{h\to\infty} \int_0^{h} e^{-st}\, dt = \lim_{h\to\infty} \left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^{h} =$$

$$= \lim_{h\to\infty} \left[\frac{1}{s} - \frac{-e^{-sh}}{s}\right] = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

O halde,

$$L\{1\} = \frac{1}{s}, \quad (s > 0) \quad \text{dır.}$$

Örnek 2. $F(t) = t$ fonksiyonunun $t > 0$ için Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$L\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, t\, dt = \lim_{h\to\infty} \int_0^{h} e^{-st}\, t\, dt = \lim_{h\to\infty} \left[-\frac{-e^{-st}}{s^2}(st + 1)\right]_0^{h}$$

$$= \lim_{h\to\infty} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{-e^{-sh}}{s^2}(sh + 1)\right] = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0$$

O halde,

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad (s > 0) \quad \text{dır.}$$

Örnek 3. $F(t) = e^{at}$ fonksiyonunun $t > 0$ için Laplace dönüşümünü bulalım.

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{h} e^{-st}\, e^{at}\, dt = \lim_{h\to\infty} \int_0^{h} e^{(a-s)t}\, dt = \lim_{h\to\infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^{h}$$

$$= \lim_{h\to\infty} \left[\frac{e^{(a-s)h}}{a-s} - \frac{1}{a-s}\right] = -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}, \quad s > 0$$

Örnek 4. $F(t) = \sin bt \quad t > 0$ için Laplace dönüşümü:

$$L\{\sin bt\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin bt\, dt = \lim_{h\to\infty} \int_0^{h} e^{-st} \sin bt\, dt$$

$$= \lim_{h\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s^2+b^2} (s \sin bt + b \cos bt) \right]_0^h$$

$$= \lim_{h\to\infty} \left[\frac{b}{s^2+b^2} - \frac{e^{-sh}}{s^2+b^2} (s \sin bh + b \cos bh) \right]$$

$$= \frac{b}{s^2+b^2}, \qquad \text{bütün} \quad s>0 \quad \text{için}$$

O halde

$$L\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}. \qquad s>0 \qquad \text{dır.}$$

Örnek 5. $F(t) = \cos bt, \; t > 0$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$L\{\cos bt\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos bt\, dt = \lim_{h\to\infty} \int_0^{h} e^{-st} \cos bt\, dt =$$

$$= \lim_{h\to\infty} \left[\frac{-e^{-st}}{s^2+b^2} (-s \cdot \cos bt + b \sin bt) \right]_0^h =$$

$$= \lim_{h\to\infty} \left[\frac{-e^{-sh}}{s^2+b^2} (-s \cdot \cos bh + b \sin bh) + \frac{s}{s^2+b^2} \right]$$

$$= \frac{s}{s^2+b^2} \qquad \text{bütün} \; s>0 \; \text{için O halde}$$

$$L\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2} \qquad s>0 \quad \text{dır.}$$

Örnek 6. $F(t) = t^n$, $t > 0$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım. n bir doğal sayı

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \lim_{h\to\infty} \int_0^h t^n . e^{-st} dt$$

$$= \lim_{h\to\infty} \left\{ \left[\frac{-t^n . e^{-st}}{s} \right]_0^h + \frac{n}{s} \int_0^h t^{n-1} e^{-st} dt \right\}$$

$s > 0$ ve $n > 0$ için

$$L\{t^n\} = \lim_{h\to\infty} \left[\frac{-t^n . e^{-st}}{s} \right]_0^h = \lim_{h\to\infty} \frac{-h^n . e^{-sh}}{s} = 0$$

olduğundan $L\{t^n\} = \frac{n}{s} L\{t^{n-1}\}$, $s > 0$ elde edilir.

Bu eşitlikten $n > 1$ için

$$L\{t^{n-1}\} = \frac{n-1}{s} L\{t^{n-2}\}$$

yazılabilir. Buradan

$$L\{t^n\} = \frac{n(n-1)}{s^2} L\{t^{n-2}\}$$

bulunur. Bu şekilde devam edilerek

$$L\{t^n\} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2 . 1}{s^n} L\{t^0\}$$

elde edilir.

$L\{t^0\} = L\{1\}$ olduğu anımsanarak her n doğal sayısı için

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0 \quad \text{yazılabilir.}$$

Çizelge 1 de bazı fonksiyonların Laplace dönüşümleri verilmiştir. Bu bölümün sonunda, Laplace dönüşümleri, ayrıntılı şekilde, **Laplace Transformasyon Tablosu** adı altında tekrar verilecektir.

Çizelge 1. Laplace dönüşümleri

$F(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$f(s) = L\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
t^n ,n = pozitif tam sayı	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$t^n e^{at}$, n = pozitif tam sayı	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\frac{e^{bt} \sin h\ at}{a}$	$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$
$e^{bt} \cosh at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$
$\frac{t \sin at}{2a}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$
$t \cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{t \sinh at}{2a}$	$\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$
$t \cosh at$	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$
$\frac{\sin bt - bt \cos bt}{2b^3}$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$
$\frac{\sin at \sin h\ at}{2a^2}$	$\frac{s}{s^4+4a^4}$
$\cos at \cosh at$	$\frac{s^3}{(s^4+4a^4)}$

Tanım II. Sonlu bir $a < t < b$ aralığı sonlu sayıda alt aralıklarına bölündüğünde bu aralıktaki bir f fonksiyonu şayet a) f bu alt aralıkların herbirinde sürekli ve b) t bu alt aralıkların her birinin uç noktalarına yaklaştıkça, $f(t)$ sonlu bir limite yaklaşırsa, bu f- fonksiyonu bu aralıkta parçalı süreklidir.

Bir f- fonksiyonu $a \le t \le b$ aralığında parçalı sürekli olsun ve t_0, $a < t_0 < b$, alt aralıklarından birinin bir uç noktası olsun. $f(t)$ fonksiyonunun soldan limiti, t t_0'a soldan yaklaştığında,

$\lim_{t \to t_0^-} f(t)$ veya $f(t_0^-)$ şeklinde tanımlanır.

Fonksiyonun sağdan limiti ise aynı şekilde t t_0'a sağdan yaklaştığında

$\lim_{t \to t_0^+} f(t)$ veya $f(t_0^+)$

olarak gösterilir. Böyle bir t_0 noktasında $f(t_0^-)$ ve $f(t_0^+)$ sonludur, fakat genelde bu değerler birbirine eşit değildir. O halde f- fonksiyonu $a < t < b$ aralığında sürekli ise bu aralıkta aynı zamanda parçalı süreklidir ve f fonksiyonu $a < t < b$ aralığında parçalı sürekli ise bu aralıkta integre edilebilen bir fonksiyondur.

Örnek 7. Bir f- fonksiyonu

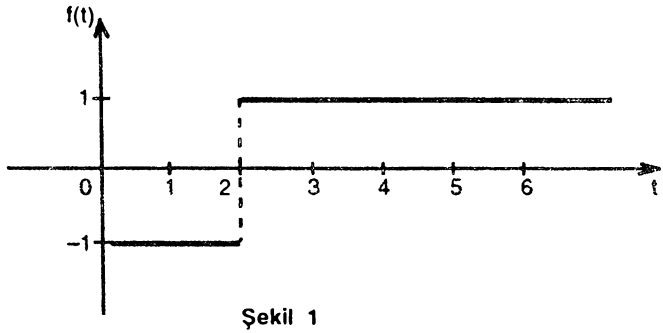
$$f(t) = \begin{cases} -1 & 0 < t < 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f, $0 \le t \le b$ aralığında parçalı süreklidir. $t = 2$ de

$$f(2-) = \lim_{t \to 2^-} f(t) = -1$$

$$f(2+) = \lim_{t \to 2^+} f(t) = +1$$

olur. Fonksiyonunun grafiği Şekil 1 'de verilmiştir.



Şekil 1

Tanım III. Bir f- fonksiyonu bütün $t > t_0$ 'larda tanımlı olsun, α bir sabit, t_o ve M pozitif sabitler olmak üzere f- fonksiyonu

$$e^{-at} \, |f(t)| < M \qquad (2)$$

şeklinde yazılabiliyorsa bu f- fonksiyonuna **üstel mertebeli fonksiyon** denir. (2) denkleminden

$$|f(t)| < M e^{\alpha t}$$

yazılabilir. Buna göre $f(t)$ fonksiyonu üstel ise $t \to \infty$ için $f(t)$ sonsuz olur.

Örnek 8. $f(t) = t^n$ fonksiyonunu ele alalım. Burada $n > 0$ dır. O zaman $e^{-\alpha t} \cdot f(t) = e^{-\alpha t} \, t^n$ olur. Herhangi bir $\alpha > 0$ için $\lim_{t \to \infty} e^{-\alpha t} \cdot t^n = 0$ dır.

Buna göre $t > t_0$ için

$$e^{-\alpha t} \, |f(t)| = e^{-\alpha t} \cdot t^n < M$$

olacak şekilde $M > 0$ ve $t_0 > 0$ mevcuttur. Dolayısıyle $f(t) = t^n$ fonksiyonu, α herhangi bir pozitif sayı olmak üzere üstel mertebeli bir ifadedir.

Şimdi (1) denklemindeki integralin mevcut olabimesi için f'in hangi koşullara sahip olması gerektiğini gösteren teoremi verelim.

Teorem 1. $0 \le g(t) \le G(t)$ $a \le t \le \infty$ olmak üzere g ve G reel fonksiyonlar olsun.

$\int_a^\infty G(t)\,dt$ integrali mevcut olsun, g, $a \le t < \infty$ aralığının her sonlu kapalı

alt aralığında integre edilebilir olsun. Bu hipotezler altında

$\int_a^\infty g(t)\,dt$ mevcuttur.

Teorem 2. g reel fonksiyonu $a \le t < \infty$ aralığının her sonlu kapalı alt aralığında integre edilebilir olsun.

$$\int_a^{\infty} |g(t)|\,dt \quad \text{mevcut ise}$$

$$\int_a^{\infty} g(t)dt \quad \text{mevcuttur.}$$

Şimdi Laplace Dönüşümünün varlığı ile ilgili teoremi ispatlayalım.

Teorem 3. F fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip gerçel bir fonksiyon olsun.

F fonksiyonu $0 \le t \le b$ $(b > 0)$ sonlu kapalı aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeli bir fonksiyon olsun. Yani $e^{-\alpha t}|F(t)| < M$, $t > t_0$ olacak şekilde α, $M > 0$ ve $t_0 > 0$ mevcut olsun. Bu hipotezler altında F fonksiyonunun $s > \alpha$ için Laplace dönüşümü mevcuttur.

İspat. $$\int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt = \int_0^{t_0} e^{-st}F(t)dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-st}F(t)dt$$

yazılabilir. Hipotezden integralin sağ tarafının birinci kısmı mevcuttur. Hipotezin son kısmına göre

$$e^{-st}|F(t)| < e^{-st}\,M e^{\alpha t} = M e^{-(s-\alpha)t}, \quad t > t_0 \quad \text{olur.}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} M e^{-(s-\alpha)}dt = \lim_{h\to\infty} \int_{t_0}^{h} M e^{-(s-\alpha)t}dt$$

$$= \lim_{h\to\infty} \left[-\frac{M e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha} \right]_{t_0}^{h}$$

$$= \lim_{h\to\infty} \left[\frac{M}{s-\alpha} \right] \left[e^{-(s-\alpha)t_0} - e^{-(s-\alpha)h} \right]$$

$$= \left[\frac{M}{s-\alpha} \right] e^{-(s-\alpha)t_0}, \quad s > \alpha \text{ olmak üzere}$$

yazılabilir. Böylece $\int_{t_0}^{\infty} M e^{-(s-\alpha)t}dt$, $s > \alpha$ için mevcuttur. Diğer taraftan hipo-

tez gereği $e^{-st}|F(t)|$, $t_0 \leq t < \infty$ aralığının her sonlu kapalı alt aralığında integre edilebilir. Teorem 1 'i uygulayarak ve $g(t) = e^{-st}|F(t)|$ ve $G(t) = Me^{-(s-\alpha)t}$ alarak

$\int_{t_0}^{\infty} e^{-st}|F(t)|\,dt$ integralinin mevcut olduğu görülebilir. Başka deyişle,

$\int_{t_0}^{\infty} |e^{-st}F(t)|\,dt$ $s > \alpha$ için mevcuttur. Teorem 2 'ye göre

$\int_{t_0}^{\infty} e^{-st}F(t)\,dt$ integrali $s > \alpha$ için mevcuttur.

Böylece F- fonksiyonunun $s > \alpha$ için Laplace dönüşümünün mevcut olduğu ispatlanmış olur.

Laplace dönüşümünün kullanılmasında Bölüm 9 'da ayrıntılı olarak verilen gamma fonksiyonları ve Bessel fonksiyonları daima göz önünde tutulacaktır. Bunlara ek olarak ayrıca, Hata fonksiyonu kavramı da, Laplace dönüşümlerinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu fonksiyon da aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım III. $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\lambda^2}\,d\lambda$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, **hata fonksiyonu** veya **olasılık fonksiyonu** denir. Bu nedenle tarif olarak, *erf* $(\infty) = 1$ olmalıdır. Diğer taraftan, hata fonksiyonunun tamlayanı,

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda$$

şeklinde ifade edilir.

Hata fonksiyonunun nümerik değerleri Tablo 2 'de verilmiştir.

Tablo - 2
HATA FONKSİYONU NÜMERİK DEĞERLERİ

z	erf z	z	erf z	z	erf z	z	erf z
0.00	0.00000	0.55	0.56332	1.10	0.88020	1.65	0.98037
0.01	0.01128	0.56	0.57161	1.11	0.88353	1.66	0.98110
0.02	0.02256	0.57	0.57981	1.12	0.88678	1.67	0.98181
0.03	0.03384	0.58	0.58792	1.13	0.88997	1.68	0.98249
0.04	0.04511	0.59	0.59593	1.14	0.89308	1.69	0.98315
0.05	0.05637	0.60	0.60385	1.15	0.89612	1.70	0.98379
0.06	0.06762	0.61	0.61168	1.16	0.89909	1.71	0.98440
0.07	0.07885	0.62	0.61491	1.17	0.90200	1.72	0.98500
0.08	0.09007	0.63	0.62704	1.18	0.90483	1.73	0.98557
0.09	0.10128	0.64	0.63458	1.19	0.90760	1.74	0.98613
0.10	0.11246	0.65	0.64202	1.20	0.91031	1.75	0.98667
0.11	0.12362	0.66	0.64937	1.21	0.91295	1.76	0.98719
0.12	0.13475	0.67	0.65662	1.22	0.91553	1.77	0.98769
0.13	0.14586	0.68	0.66378	1.23	0.91805	1.78	0.98817
0.14	0.15694	0.69	0.67084	1.24	0.92050	1.79	0.98864
0.15	0.16799	0.70	0.67780	1.25	0.92290	1.80	0.98909
0.16	0.17901	0.71	0.68466	1.26	0.92523	1.81	0.98952
0.17	0.18999	0.72	0.69143	1.27	0.92751	1.82	0.98994
0.18	0.20093	0.73	0.69810	1.28	0.92973	1.83	0.99034
0.19	0.21183	0.74	0.70467	1.29	0.93189	1.84	0.99073
0.20	0.22270	0.75	0.71115	1.30	0.93400	1.85	0.99111
0.21	0.23352	0.76	0.71753	1.31	0.93606	1.86	0.99147
0.22	0.24429	0.77	0.72382	1.32	0.93806	1.87	0.99182
0.23	0.25502	0.78	0.73001	1.33	0.94001	1.88	0.99215
0.24	0.26570	0.79	0.73610	1.34	0.94191	1.89	0.99247
0.25	0.27632	0.80	0.74210	1.35	0.94376	1.90	0.99279
0.26	0.28689	0.81	0.74800	1.36	0.94556	1.91	0.99308
0.27	0.29741	0.82	0.75381	1.37	0.94731	1.92	0.99337
0.28	0.30788	0.83	0.75952	1.38	0.94901	1.93	0.99365
0.29	0.31828	0.84	0.76514	1.39	0.95067	1.94	0.99392
0.30	0.32862	0.85	0.77066	1.40	0.95228	1.95	0.99417
0.31	0.33890	0.86	0.77610	1.41	0.95385	1.96	0.99442
0.32	0.34912	0.87	0.78143	1.42	0.95537	1.97	0.99466
0.33	0.35927	0.88	0.78668	1.43	0.95685	1.98	0.99489
0.34	0.36936	0.89	0.79184	1.44	0.95829	1.99	0.99511
0.35	0.37938	0.90	0.79690	1.45	0.95969	2.00	0.99532
0.36	0.38932	0.91	0.80188	1.46	0.96105	2.20	0.99814
0.37	0.39920	0.92	0.80676	1.47	0.96237	2.40	0.99931
0.38	0.40900	0.93	0.81156	1.48	0.96365	2.60	0.99976
0.39	0.41873	0.94	0.81627	1.19	0.96489	2.80	0.99962
0.40	0.42839	0.95	0.82089	1.50	0.96610	3.00	0.999978
0.41	0.73796	0.96	0.82542	1.51	0.96772	3.20	0.999994
0.42	0.44746	0.97	0.82987	1.52	0.96841	3.40	0.999998
0.43	0.45688	0.98	0.83423	1.53	0.96951	3.60	1.000000
0.44	0.46622	0.99	0.83850	1.54	0.97058		
0.45	0.47548	1.00	0.84270	1.55	0.97162		
0.46	0.48465	1.01	0.84681	1.56	0.97262		
0.47	0.49374	1.02	0.85083	1.57	0.97360		
0.48	0.50274	1.03	0.85478	1.58	0.97454		
0.49	0.51166	1.04	0.85864	1.59	0.97546		
0.50	0.52049	1.05	0.86243	1.60	0.97634		
0.51	0.52924	1.06	0.86614	1.61	0.97720		
0.52	0.53789	1.07	0.86977	1.62	0.97803		
0.53	0.54646	1.08	0.87332	1.63	0.97884		
0.54	0.55493	1.09	0.87680	1.64	0.97962		

8-3 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Teorem 4. F_1 ve F_2 Laplace dönüşümü alınabilen iki ayrı fonksiyon olsun. C_1 ve C_2 herhangi iki sabit sayı olmak üzere

$$L\{C_1F_1(t) + C_2F_2(t)\} = C_1 L\{F_1(t)\} + C_2 L\{F_2(t)\} \qquad (3)$$

eşitliği vardır ve buna Laplace dönüşümünün "**doğrusallık özelliği**" denir.

İspat. Teoremin ispatını yapmak için yukarıdaki eşitliğin sol tarafını ele alarak sağ tarafını elde etmeye çalışalım. Eşitliğin sol tarafına Eşitlik (1) 'i uygulayalım.

$$L\{C_1F_1(t) + C_2F_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,[\,C_1F_1(t) + C_2F_2(t)\,]\,dt$$

$$= C_1 \int_0^\infty e^{-st} F_1(t)\,dt + C_2 \int_0^\infty e^{-st} F_2(t)\,dt$$

$$= C_1 L\{F_1(t)\} + C_2 L\{F_2(t)\}$$

eşitliği sağlanır. O halde Laplace dönüşümü lineerdir.

Örnek 9. Bu teoremi kullanarak $L\{\sin^2 at\}$ yi bulalım.

$$\sin^2 at = \frac{1 - \cos 2at}{2} \quad \text{olduğundan}$$

$$L\left\{\sin^2 at\right\} = L\left\{\frac{1}{2}\right\} - L\left\{\frac{1}{2}\cos 2at\right\}$$

$$L\left\{\sin^2 at\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 + 4a^2} = \frac{2a^2}{s\left(s^2 + 4a^2\right)}$$

elde edilir.

Teorem 5. $F(t)$ $t \geq 0$ için sürekli ve üstel bir reel fonksiyon olsun. F fonksiyonunun F' türevi de $0 \leq t \leq b$ her sonlu kapalı aralığında parçalı sürekli olsun. $s > \alpha$ için $L\{F'(t)\}$ mevcutsa

$$L\{F'(t)\} = s\,L\{F(t)\} - F(0) \quad \text{olur.}$$

İspat. Laplace dönüşümünün tanımına göre

$$L\{F'(t)\} = \lim_{h\to\infty} \int_0^h e^{-st} . F'(t)dt \qquad (4)$$

bu limit mevcuttur. Herhangi bir kapalı $0 \le t \le h$ aralığında $F'(t)$ sonlu sayıda süreksizliğe sahiptir. Bunları $t_1 , t_2 , \ldots t_n$ ile gösterelim; yani

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le h$$

dır. O halde

$$\int_0^h e^{-st} F'(t)\,dt = \int_0^{t_1} e^{-st} F'(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} F'(t)\,dt + \ldots + \int_{t_n}^{h} e^{-st} F'(t)\,dt$$

yazabiliriz. Sağdaki integrallerin hepsi süreklidir. Tek tek integre ederek

$$\int_0^h e^{-st} F'(t)\,dt = \left[e^{-st} F(t)\right]_0^{t_1} + s \int_0^{t_1} e^{-st} F(t)\,dt +$$

$$\left[e^{-st} F(t)\right]_{t_1+}^{t_2-} + s \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} F(t)\,dt + \ldots +$$

$$\left[e^{-st} F(t)\right]_{t_n+}^{h-} + s \int_{t_n}^{h} e^{-st} F(t)\,dt$$

(a) hipotezine göre $t \ge 0$ için $F(t)$ süreklidir. O halde

$F(t_{1-}) = F(t_{1+})$, $F(t_{2-}) = F(t_{2+})$, ... $F(t_{n-}) = F(t_{n+})$ 'dır.

$e^{-st} F(t)\big|_{t=0}$ ve $e^{-st} F(t)\big|_{t=h-}$ dışında bütün integre edilmiş kısımlar birbirine ilave edildiğinde

$$\int_0^h e^{-st} F'(t)\,dt = -F(0) + e^{-sh} F(h) + s \int_0^h e^{-st} F(t)\,dt$$

elde edilir. (a) hipotezine göre F üstel bir fonksiyondur. Böylece $e^{-\alpha t} |F(t)| < M$ $t > t_0$ olacak şekilde $M > 0$ ve $t_0 > 0$ mevcut olup buradan $|e^{-sh} F(h)| < M e^{-(s-\alpha)h}$, $h > t_0$ elde edilir.

Böylece $s > \alpha$ için

$$\lim_{h\to\infty} e^{-sh} F(h) = 0 \qquad \text{ve}$$

$$\lim_{h\to\infty} s \int_0^h e^{-st} F(t)\, dt = s\, L\{F(t)\}$$

yazılarak

$$\lim_{h\to\infty} \int_0^h e^{-st} F'(t)\, dt = -F(0) + s\, L\{F(t)\}$$

bulunur. Böylece $s > \alpha$ için $L\{F'(t)\}$ nin mevcut olduğu görülür.

Örnek 10. $F(t) = \sin^2 at$ fonksiyonunu düşünelim. Fonksiyon Teorem 5 'i sağlar. (4) nolu eşitliği kullanarak ve

$F'(t) = 2 \sin at \cos at$ ve $F(0) = 0$ olarak

$L\{2a \sin at \cos at\} = s\, L\{\sin^2 at\}$

yazabiliriz.

$$L\{\sin^2 at\} = \frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$$

olduğu hatırlanarak

$$L\{2a \sin at \cos at\} = \frac{2a^2}{s^2 + 4a^2}$$

elde edilir. Halbuki $2a \sin at \cos at = a \sin 2at$ olduğundan

$$L\{\sin 2at\} = \frac{2a}{s^2 + 4a^2}$$

olarak bulunur.

Teorem 6. F fonksiyonu $t \geq 0$ için sürekli $(n-1)$. $F^{(n-1)}$ türevine sahip (dolayısı ile $F, F', \ldots, F^{(n-2)}$ keza sürekli) gerçel bir fonksiyon olsun. Diğer taraftan $F, F', \ldots F^{(n-1)}\, e^{\alpha t}$ şeklinde üstel olsun. $F^{(n)}$ her sonlu kapalı $0 \leq t \leq b$ aralığında parçalı sürekli olsun. Buna göre

$$L\{F^{(n)}\} \qquad s > \alpha \quad \text{için}$$

$$L\{F^{(n)}(t)\} = s^n L\{F(t)\} - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0)$$
$$- s^{n-3} F''(0) - \ldots - F^{(n-1)}(0) \tag{5}$$

Örnek 11. $L\{\sin bt\}$ yi (5) denklemini kullanarak bulalım. $n = 2$ için (5) denklemi

$$L\{F''(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - sF(0) - F'(0) \tag{6}$$

halini alır. Buna göre

$$F'(t) = b \cos bt, \quad F''(t) = -b \sin bt, \quad F(0) = 0$$
$$F'(0) = b$$

olup bunu (6) denkleminde yerine koyarsak

$$L\{-b^2 \sin bt\} = s^2 L\{\sin bt\} - b$$

ve

$$(s^2 + b^2) L\{\sin bt\} = b$$

bulunur. O halde

$$L\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2 + b^2}, \qquad s > 0$$

elde edilir.

Teorem 7. (Geçiş Özelliği)

F- fonksiyonunun, $s > \alpha$ değerleri için $L\{F(t)\}$ Laplace dönüşümü olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır.

(i) Herhangi bir a sabit sayısı için

$$L\{e^{at} F(t)\} = f(s - a), \qquad s > \alpha + a \tag{7}$$

dır.

(ii) $L\{t^m\} = \dfrac{m!}{s^{m+1}}$ dır. Burada m, herhangi bir reel sayıyı tarif etmektedir.

(iii) $L\{t^m . e^{at}\} = \dfrac{m!}{(s-a)^{m+1}}$ dır. Yine burada m, herhangi bir reel sayıdır.

İspat: (i) Eşitlik (1) de s yerine $s-a$ koyarsak,

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} . e^{at} F(t)\,dt$$

$$= L\{e^{at} . F(t)\} \text{ elde edilir.}$$

(ii) İspat için Gamma fonksiyonunu kullanmak yeterlidir.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} . e^u\,du = (n-1)!$$

$$L\{t^m\} = \int_0^\infty e^{-st} . t^m\,dt = \int_0^\infty e^u \left(-\frac{u}{s}\right)^m \left(-\frac{du}{s}\right)$$

$-st = u \Rightarrow -sdt = du$ olmak üzere yazılabilir.

$$L\{t^m\} = \frac{1}{s^{m+1}} \int_0^\infty e^u . u^m\,du = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} = \frac{m!}{s^{m+1}}$$

elde edilir.

(iii) $\dfrac{m!}{(s-a)^{m+1}} = L\{t^m . e^{at}\}$ nin ispatı için (i) özelliğinden yararlanılıp (ii) de ki işlem sırası uygulanacaktır.

$$L\{t^m . e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} . e^{at} t^m\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} . t^m\,dt$$

$-(s-a) = u \Rightarrow -(s-a)\,dt = du$

$$= \int_0^\infty e^{ut} \left(-\frac{u}{s-a}\right)^m \left(-\frac{du}{s-a}\right) = \frac{1}{(s-a)^{m+1}} \int_0^\infty e^{ut} . u^m\,du$$

$$= \frac{1}{(s-a)^{m+1}} . \Gamma(m+1) = \frac{m!}{(s-a)^{m+1}} \quad \text{elde edilir.}$$

Örnek 12. $L\{e^{at}t\}$ yi bulalım.

Burada $F(t) = t$ dir.

$L\{e^{at}t\} = F(s-a)$

$F(s) = L(t) = \frac{1}{s^2}$ $(s > 0)$ dır. Buna göre

$$F(s-a) = \frac{1}{(s-a)^2}$$

olur. O halde

$$L\left\{e^{at}t\right\} = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad (s > a) \quad \text{dır.}$$

Örnek 13. $L\{e^{at}\,sn\,bt\}$ 'yi bulalım. $F(t) = \sin bt$ olup

$L\{e^{at}\sin bt\} = F(s-a)$

dır. Burada $F(s) = L\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}$, $(s > 0)$ dır.

O halde

$$F(s-a) = \frac{1}{(s-a)^2+b^2} \quad \text{ve}$$

$$L\left\{e^{at}\sin bt\right\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad (s > a) \quad \text{dır.}$$

Örnek 14. $L\{t^{3/2}\}$ yi bulalım.

$L\left\{t^m\right\} = \frac{m!}{s^{m+1}}$ özelliğinden yararlanacağız.

$$L\left\{t^{3/2}\right\} = \frac{\frac{3}{2}!}{s^{\frac{3}{2}+1}} = \frac{\frac{3}{2}!}{s^{\frac{5}{2}}}$$

$\frac{3}{2}!$ değerini hesaplamanız gerekir.

Gamma fonksiyonunun özelliğinden,

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n), \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \text{ve} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

olduğundan,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}!$$

$$\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}!$$

$$\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2}!$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}!$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{2}! \Rightarrow \frac{3}{2}! = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

O halde,

$$L\left\{t^{3/2}\right\} = \frac{\frac{3}{2}!}{s^{5/2}} = \frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}{s^{5/2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\cdot s^{5/2}}$$

Örnek 15. $L\left\{t^{1/2}\cdot e^{2t}\right\}$ yi bulalım. Çözüm için özellik (iii) den yararlanacağız.

$$L\left\{t^{1/2}\cdot e^{2t}\right\} = \frac{\frac{1}{2}!}{(s-2)^{\frac{1}{2}+1}} = \frac{\frac{1}{2}!}{(s-2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{1}{2}!$ değerini hesaplamamız gerekir.

Gamma fonksiyonunun özelliklerini kullanarak,

$\frac{1}{2}! = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)$ yazabiliriz.

$\frac{1}{2}! = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ elde edilir.

O halde;

$$L\left\{t^{1/2}.e^{2t}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(s-2)^{3/2}}$$

sonucu bulunur.

Örnek 16. $L\{t^{-1/2}\}$ yi bulalım.

Özellik (ii) den yararlanabiliriz.

$$L\left\{t^{-1/2}\right\} = \frac{-\frac{1}{2}!}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{-\frac{1}{2}!}{s^{-\frac{1}{2}}}$$

$-\frac{1}{2}!$ değerini Gamma fonksiyonunun özelliklerinden yararlanarak,

$\Gamma(n+1) = n!$ ise $\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right) = -\frac{1}{2}!$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}!\,, \quad -\frac{1}{2}! = \sqrt{\pi} \text{ dir.}$$

Sonuç olarak,

$$L\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\} = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$$ elde edilir.

Teorem 8. *F* fonksiyonu Laplace dönüşümü mevcut bir fonksiyon olsun ve Laplace dönüşümü ise

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)dt$$

verilsin. G fonksiyonu ise

$$G(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < a \\ F(t-a) & t > a \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa,

$$L\{G(t)\} = e^{-st}.f(t) \qquad (8)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $L\{G(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot G(t)\,dt$

$$L\{G(t)\} = \int_0^{a} e^{-st} \cdot 0\,dt + \int_0^{\infty} e^{-st} F(t-a)\,dt$$

$$= \int_a^{\infty} e^{-st} \cdot F(t-a)\,dt$$

$t - a = T$ dersek,

$$\int_a^{\infty} e^{-st} \cdot F(t-a)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-s(T+a)} F(t)\,dt$$

$$= e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-sT} \cdot F(t)\,dt = e^{-as} L\{F(t)\} \quad \text{olur.}$$

Böylece $L\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$

Örnek 17. $G(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t & t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

olduğuna göre $L\{G(t)\}$ 'yi bulunuz.

Çözüm: $\sin t = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan

$$G(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

yazılabilir. Teorem 8 'e göre $F(t) = \cos t$ olup

$$L\{G(t)\} = e^{-\frac{\pi}{2}s} f(s)$$

$$f(s) = L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1} \quad \text{ve buradan}$$

$$L\{G(t)\} = \frac{s e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2 + 1} \quad \text{elde edilir.}$$

Teorem 9. F fonksiyonu Laplace dönüşümü

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \tag{9}$$

olan bir fonksiyon olsun.

Buna göre n pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$L\{t^n . F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[f(s)] \tag{10}$$

dır.

İspat. (9) denkleminin n defa s ye göre türevini alalım.

$$f'(s) = (-1)^1 \int_0^\infty e^{-st} t F(t)\, dt$$

$$f''(s) = (-1)^2 \int_0^\infty e^{-st} t^2 F(t)\, dt$$

$$\vdots$$

$$f^n(s) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-st} t^n F(t)\, dt$$

Böylece istenen sonucun elde edildiği görülür.

Örnek 18. $L\{t^2 . \sin bt\}$ yi Teorem 9 'u kullanarak bulunuz.

Çözüm: Teorem 9 'a göre

$$L\{t^2 . \sin bt\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}[F(s)]$$

dir. Burada

$$F(s) = L\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

Buna göre,

$$\frac{d}{ds}[F(s)] = -\frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$$

ve

$$\frac{d^2}{ds^2}[F(s)] = \frac{6bs^2 - 2b^3}{(s^2 + b^2)^3}$$ olup buradan,

$$L\{t^2 . \sin bt\} = \frac{6bs^2 - 2b^3}{(s^2 + b^2)^3}$$ yazılır.

Teorem 10. F fonksiyonu parçalı sürekli ve Laplace dönüşümü mevcut bir fonksiyon ise

$$L\left\{\int_0^t F(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s} L\{F(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$ dir.

Örnek 19. $F(t) = e^{-2t}$ olduğuna göre

$$L\left\{\int_0^t e^{-2t}\,dt\right\}$$ 'yi hesaplayınız.

Çözüm: $F(s) = \frac{1}{s+2}$ olup $L\left\{\int_0^t e^{-2t}\,dt\right\} = \frac{1}{s(s+2)}$ olur.

8-4 TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Buraya kadar hep $t > 0$ için bir F fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulmaya çalıştık. Şimdi bu problemin tersini düşünelim. Yani fonksiyonun Laplace dönüşümü $f(s)$ belli olsun ve bu dönüşüme uyan F fonksiyonunu bulmaya çalışalım. Bu $F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$ şeklinde gösterilir ve $L^{-1}\{f(s)\}$ ye $F(t)$ 'nin **Ters Laplace Dönüşümü** denir.

8-5 TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ

1. Doğrusallık Özelliği: Ters Laplace dönüşümü doğrusal bir operatördür. $F_1(t)$ ve $F_2(t)$ fonksiyonların Laplace dönüşümleri $f_1(s)$ ve $f_2(s)$ ise a ve b sabitler olmak üzere

$$L^{-1}\{a f_1(s) + b f_2(s)\} = a F_1(t) + bF_2(t) \qquad (11)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin sağlandığını görmek oldukça kolaydır.

$L\{a F_1(t) + b F_2(t)\} = a f_1(s) + b_2 f_2(s)$ olduğundan

$L^{-1}\{a f_1(s) + b f_2(s)\} = a F_1(t) + b F_2(t)$ yazılabilir.

$$= a L^{-1}\{f_1(s)\} + b L^{-1}\{f_2(s)\}$$

elde edilir.

Örnek 20. $$L^{-1}\left\{\frac{5}{s-1} - 3\frac{s}{s^2+9}\right\} = 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}$$

$$= 5e^{t} - 3\cos 3t$$

2. Laplace dönüşümünde olduğu gibi, eğer

$L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ise

$$L^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{d^n f}{ds^n}\right\} = (-1)^n t^n F(t) \quad \text{'dir.} \qquad (12)$$

Örnek 21. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ olduğuna göre

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$$ bulalım.

Çözüm: $$L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right\} = -t\sin t = (-1)^1 t\sin t$$

O halde buradan

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2} t\sin t$$

elde edilir.

3. $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ olmak üzere

$$L^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t) \text{ 'dır.} \qquad (13)$$

Örnek 22. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t = F(t)$ olduğuna göre

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\}$$ 'i bulalım.

Çözüm: $$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\} = e^t\frac{1}{2}\sin 2t = \frac{1}{2}e^t\sin 2t$$

olur.

4. $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ olmak üzere

$$L^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \text{ dır.} \qquad (14)$$

Örnek 23. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ olduğuna göre $L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right\}$ bulun. Burada $a = \pi/3$ olup ters Laplace dönüşümünün yukarıda verilen özelliğine göre

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right\} = \begin{cases} \sin(t-\pi/3) & t > \pi/3 \\ 0 & t < \pi/3 \end{cases}$$

elde edilir.

5. $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ise

$$L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)\,du \quad \text{dur.}$$

Örnek 24. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t$ ise $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}$ 'yi bulun.

Çözüm: $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}\sin 2u\,du = -\frac{1}{4}[\cos 2u]_0^t$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$$

elde edilir.

8-6 KONVOLİSYON ÖZELLİKLERİ VE TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN BULUNMASI

Tanım IV. *F* ve *G* $0 \le t \le b$ kapalı aralığında sürekli ve üstel mertebeli Laplace dönüşümü alınabilen iki fonksiyon olsunlar. Bu fonksiyonların $F \ast G$ şeklinde gösterilen ve

$$F(t) \ast G(t) = \int_0^t F(\tau)\,.\,G(t-\tau)\,d \qquad (15)$$

şeklinde tanımlanan ifadesine *F* ve *G* fonksiyonlarının **konvolisyon çarpımları** denir.

Konvolisyon işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) $F(t) \ast G(t) = G(t) \ast F(t)$ (Değişme özelliği)

(ii) $F(t) * [G(t) + H(t)] = F(t) * G(t) + F(t) * H(t)$

(Konvolisyon işlemi toplama üzerine dağılır.)

(iü) $a \in R$ olmak üzere,

$F(t) * (\alpha G(t)) = k(F(t) * G(t))$

(iv) $F(t) * [G(t) * H(t)] = [F(t) * G(t)] * H(t)$ (Birleşme özelliği)

Teorem 11. *F* ve *G* sonlu $0 \le t \le b$ kapalı aralığında sürekli ve üstel mertebeli, Laplace dönüşümü alınabilen fonksiyonlar olsunlar.

$$L\{F * G\} = L\{F\} . L\{G\} \quad s > \alpha \tag{16}$$

eşitliği sağlanır. Eğer özel olarak, $F(t) = G(t)$ ise

$L\{F * F\} = [L\{F\}]^2$ dir.

Teorem 11 de verilen sonuç aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$L\{F * G\} = L\{F\} L\{G\}$ ifadesi

$L\{F * G\} = f(s) g(s)$ biçiminde yazılabilir.

Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$L^{-1}\{ f(s) g(s) \} = F(t) * G(t)$ elde edilir. Aynı düşünce özel durum olan $f(t) = g(t)$ için ise $L^{-1}\{ [f(s)]^2 \} = F(t) * G(t)$ elde edilir.

Örnek 25. Aşağıda verilen ifadelerin ters Laplace transformasyonlarını elde ediniz.

a. $L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-a} \right\}$

b. $L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s^2 + k^2)^2} \right\}$

c. $L^{-1}\left\{ \frac{1}{\sqrt{s}\,(s-1)} \right\}$

Çözüm: a. $L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-a} \right\}$ ifadesinde

$f(s) = \frac{1}{s^2}$ ve $g(s) = \frac{1}{s-a}$ olarak düşünüldüğünde,

$F(t) = t$ ve $G(t) = e^{at}$ olduğundan Teorem 11 'in sonucu gereği,

$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-a}\right\} = t * e^{at}$ yazılabilir. Bu son ifade tanım gereği,

$t * e^{at} = \int_0^t \tau e^{\alpha(t-\tau)}\, d\tau$ olur. Belirli integral alınıp düzenlenirse,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-a}\right\} = t * e^{at} = \int_0^t \tau e^{\alpha(t-\tau)}\, d\tau$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-a}\right\} = \frac{1}{a^2}\left(e^{at} - at - 1\right)$$ elde edilir.

b. $L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\}$ ifadesinin ters Laplace dönüşümünün alınmasında Teorem 11 'de verilen sonucun özel hali kullanılabilir.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+k^2\right)}\cdot\frac{1}{\left(s^2+k^2\right)}\right\}$$

ifadesinde

$$f(s) = \frac{1}{s^2+k^2} \quad \Rightarrow \quad L^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{k}\sin kt$$

dir. O halde,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\} = \frac{1}{k^2}\sin kt * \sin kt \quad \text{olur.}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\} = \frac{1}{k^2}\int_0^t \sin k\tau \,.\, \sin k(t-\tau)\, d\tau$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt)$$

elde edilir.

c. $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}\,(s-1)}\right\}$ ifadesinde ters Laplace dönüşümünü elde edelim. Teorem 11 'in sonucuna göre;

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}\,(s-1)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * e^t = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\tau}\,\frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}}$$

elde edilir. Bu son ifade de, $r = \sqrt{\tau}$ dönüşümü yaparsak

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}\,(s-1)}\right\} = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-r^2}\,dr$$

elde edilir.

Daha önce hata fonksiyonu olarak verilen

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx$$

olarak tanımlanan ifadeden de yararlanarak,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}\,(s-1)}\right\} = e^t erf(\sqrt{t})$$

olarak elde edilir.

8-7 TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN BASİT KESİRLERE AYIRARAK BULUNMASI

Şimdi ters Laplace dönüşümünün nasıl bulunacağını görelim.

$L\{F(t)\} = f(s)$ dönüşümünde $f(s)$ eğer

$f(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ şeklinde bir kesir ise

$L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{p(s)}{q(s)}\right\}$ ters dönüşümü

$\frac{p(s)}{q(s)}$ 'nin basit kesirlere ayrılması ile bulunur. $p(s)$ m. dereceden bir polinom, $q(s)$ ise $n > m$ olmak üzere n. dereceden bir polinom ise, $q(s)$ nin köklerinin durumuna göre ters Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi bulunur.

1. $q(s)$ 'nin kökleri gerçel ve biribirinden farklı ise; bu durumda ters Laplace dönüşümü iki şekilde bulunabilir:

   a. $p(s)/q(s)$ kesri n tane basit kesrin toplamı olarak yazılır.

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{q_1(s)\,q_2(s)\ldots q_n(s)} = \frac{A_1}{q_1(s)} + \frac{A_2}{q_2(s)} + \ldots + \frac{A_n}{q_n(s)} \qquad (17)$$

Daha sonra $A_1, A_2, \ldots A_n$ katsayıları bulunur ve ters Laplace dönüşümünün doğrusallık özelliğinden yararlanarak herbir basit kesrin ters dönüşümü bulunur.

Örnek 26. $L^{-1}\left\{\frac{s^2 - s + 2}{s^3 - s^2 - 6s}\right\}$ 'yi hesaplayınız.

$$\frac{s^2 - s + 2}{s^3 - s^2 - 6s} = \frac{s^2 - s + 2}{s\left(s^2 - s - 6\right)} = \frac{s^2 - s + 2}{s(s-3)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+2}$$

$$s^2 - s + 2 = A(s-3)(s+2) + B\,s(s+2) + C\,s(s-3)$$

$s = 0$ için $2 = A(-6) \Rightarrow A = -1/3$

$s = -2$ için $4 + 2 + 2 = -2C(-5) \Rightarrow C = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$s = +3$ için $9 - 3 + 2 = 3B \cdot 5 \Rightarrow B = 8/15$

bulunur.

$$\frac{s^2 - s + 2}{s(s-3)(s+2)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s} + \frac{8}{15}\cdot\frac{1}{s-3} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{s+2}$$

olup ters Laplace dönüşümü

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2 - s + 2}{s(s-3)(s+2)}\right\} = -\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{8}{15}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{4}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

ve

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2 - s + 2}{s(s-3)(s+2)}\right\} = -\frac{1}{3} + \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}$$ bulunur.

b. Ters Laplace dönüşümü Heaviside formülü ile de bulunabilir. Buna göre,

$$L^{-1}\left\{\frac{p(s)}{q(s)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{p(s)}{q_1(s)\,q_2(s)\,\ldots\,q_n(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p(s_k)}{q'(s_k)} e^{s_k t} \qquad t \geq 0 \qquad (18)$$

dır. Formülde yer alan s_k 'lar $q(s)$ nin kökleridir.

Örnek 27. $L^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{2s^2+5s+3}\right\}$ ters Laplace dönüşümü Heaviside formülünü kullanarak bulalım.

Çözüm: Burada $p(s) = s + 4$ $q(s) = 2s^2 + 5s + 3 = 2(s+1)\left(s + \dfrac{3}{2}\right)$dir.

O halde $q(s)$ nin kökleri $s_k = -1$ ve $-\dfrac{3}{2}$ dir.

$q'(s) = 4s + 5$ olup formülü uygularsak

$$L^{-1}\left\{\frac{s+4}{2s^2+5s+3}\right\} = \frac{p(-1)}{q'(-1)} e^{t} + \frac{p(-3/2)}{q'(-3/2)} e^{-\frac{3}{2}t} = 3e^{-t} - \frac{5}{2} e^{-\frac{3}{2}t}$$

elde edilir.

2. $q(s)$ nin kökleri gerçel ve katlı ise ters Laplace dönüşümünün bulunması

$s = a$ $q(s)$ 'nin m katlı kökü olsun. O zaman $f(s)$

$$f(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A_m}{(s-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \frac{A_1}{s-a} \qquad (19)$$

olur. A_k katsayılarını bulmak için eşitliğin her iki tarafını $(s-a)^m$ ile çarpalım.

$$\frac{(s-a)^m p(s)}{q(s)} = A_m + A_{m-1}(s-a) + \ldots + A_2 (s-a)^{m-2} + A_1 (s-a)^{m-1} \qquad (20)$$

elde edilir. Bu denklemde $s = a$ konularak A_m katsayısı

$$A_m = \left[\frac{(s-a)^m p(s)}{q(s)}\right]_{s=a} \qquad (21)$$

olarak bulunur.

(18) nolu denklem s'ye göre türetilirse

$$\frac{d}{ds}\left[(s-a)^m \frac{p(s)}{q(s)}\right] = A_{m-1} + \ldots + A_2 (m-2)(s-a)^{m-3} + A_1 (m-1)(s-a)^{m-2}$$

ve $s = a$ koyarak A_{m-1} katsayısı

$$A_{m-1} = \frac{d}{ds}\left[(s-a)^m \frac{p(s)}{q(s)}\right]_{s=a} \tag{22}$$

bulunur. Bu şekilde devam edilerek

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!}\left\{\frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}}\left[(s-a)^m \frac{p(s)}{q(s)}\right]_{s=a}\right\}$$

$$k = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{23}$$

elde edilir. O halde

$$H_{(s)} = \frac{(s-a)^m p(s)}{q(s)}$$

olmak üzere A katsayıları sırası ile

$$A_m = H(a)$$

$$A_{m-1} = H'(a)$$

$$A_{m-2} = \frac{1}{2!} H''(a)$$

$$\vdots \tag{24}$$

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!} H^{(m-k)}(a) \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1$$

dir. Diğer taraftan

$$L^{-1}\left\{\frac{A_k}{(s-a)^k}\right\} = A_k \frac{e^{at} t^{k-1}}{(k-1)!}$$

olduğu anamsınarak f (s) nin ters Laplace dönüşümü

$$L^{-1}\left\{\frac{p(s)}{q(s)}\right\} = \left[A_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + A_{m-1} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} + \ldots + A_2 \frac{t}{1!} + A_1\right] e^{at} \tag{25}$$

olarak elde edilir.

Örnek 28. $L^{-1}\left\{\dfrac{5s^3-6s-3}{s^3(s+1)^2}\right\}$ ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: İfadeyi şöyle yazabiliriz.

$$\frac{5s^3-6s-3}{s^3(s+1)^2}=\frac{A_3}{s^3}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_1}{s}+\frac{B_2}{(s+1)^2}+\frac{B_1}{s+1}$$

Şimdi A_1, A_2, A_3 ve B_1 ve B_2 katsayılarını hesaplayalım.

$a = 0$ için

$$H(s)=\frac{(s-0)^3(5s^3-6S-3)}{s^3(s+1)^2}=\frac{5s^3-6s-3}{(s+1)^2}$$

$$A_3 = H(0) = \frac{-3}{1} = -3$$

$$A_2 = H'(0) = 0$$

$$A_1 = \frac{1}{2!}\,H''(0) = 3$$

benzer şekilde B katsayıları için

$$b=-1 \text{ ve } H_1(s)=\frac{(s+1)^2(5s^3-6s-3)}{s^3(s+1)^2}=\frac{5s^3-6s-3}{s^3}$$

$$B_2 = H_1(-1) = 2 \qquad B_2 = H_1'(-1) = -3$$

Buna göre ters Laplace dönüşümü:

$$L^{-1}\left\{\frac{5s^3-6s-3}{s^3(s+1)^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-3}{s^3}+\frac{3}{s}+\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{3}{s+1}\right\}$$

$$=-3L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}+3L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+2L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}-3L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$=-\frac{3}{2}t^2+3+2te^t-3e^{-t}$$

3. *q(s)* 'nin kökleri karmaşık ve birbirinden farklı ise ters Laplace dönüşümünün bulunması:

$s = a = \alpha + i\beta$ $q(s)$ 'nin kökü olsun. Bu takdirde eşleneği

$\bar{a} = \alpha - i\beta$ da köküdür ve

$$f(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{s-\bar{a}} \tag{26}$$

yazılabilir. (24) nolu denklemin ters Laplace dönüşümü alınarak

$$F(t) = A_1 e^{at} + A_2 e^{\bar{a}t} \tag{27}$$

bulunur. Şimdi

$$H(s) = \frac{(s-a)\,p(s)}{q(s)}$$

diyelim. Buna göre A_1 ve A_2 katsayıları

$$A_1 = H(a)$$

$$A_2 = H(\bar{a}) \tag{28}$$

olur. $H(a)$ ve $H(\bar{a})$ yi

$$H(a) = H_1 + iH_2 \qquad H(\bar{a}) = H_1 - iH_2 \tag{29}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman (25) dönüşümü

$$F(t) = (H_1 + iH_2)e^{(\alpha+i\beta)t} + (H_1 - iH_2)e^{(\alpha-i\beta)t} \tag{30}$$

veya

$$F(t) = [(H_1 + iH_2)(\cos\beta t + i\sin\beta t) + (H_1 - iH_2)(\cos\beta t - i\sin\beta t)e^{\alpha t}$$

veya düzenlenip kısaltılarak

$$F(t) = 2e^{\alpha t}(H_1\cos\beta t - H_2\sin\beta t) \tag{31}$$

olur.

Örnek 29. $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-2s+2}\right\}$ yi hesaplayınız.

Burada

$$f(s)=\frac{p(s)}{q(s)}=\frac{s}{s^2-2s+2}$$

dir. Buna göre

$q(s)=s^2-2s+2$ olup kökleri $a=1+i$ $\bar{a}=1-i$ dir.

ve $\alpha=1$, $\beta=1$ dir.

$$H(s)=\frac{(s-a)\,p(s)}{(s-a)(s-\bar{a})}=\frac{(s-a)\,s}{(s-a)(s-\bar{a})}=\frac{s}{s-\bar{a}}$$

$$H(a)=\frac{1+i}{(1+i)-(1-i)}=\frac{1+i}{1+i-1+i}=\frac{1+i}{2i}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

Buna göre

$$A_1=\frac{1}{2}\qquad H_2=-\frac{1}{2}$$

dir. O halde ters dönüşüm

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2s+2}\right\}=2e^{t}\left(\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right)$$

bulunur.

4. $q(s)$ nin kökleri karmaşık ve katlı ise ters Laplace dönüşümünün bulunması

$s=a=\alpha+i\beta$ $q(s)$ nin m katlı kökü olsun. Buna göre

$\bar{a}=\alpha+i\beta$ da $q(s)$ nin m katlı köküdür.

Bu durumda

$$f(s)=\frac{p(s)}{q(s)}=\frac{A_m}{(s-a)^m}+\frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_1}{s-a}+\frac{B_m}{(s-\bar{a})^m}+\frac{B_{m-1}}{(s-\bar{a})^{m-1}}+\ldots+\frac{B_1}{s-\bar{a}} \qquad (32)$$

yazılır. $f(s)$ 'nin ters dönüşümü alınarak

$$F(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \quad e^{\alpha t} \left[(A_k + B_k) \cos \beta t + i (A_k - B_k) \sin \beta t \right]$$

$$k = 1, 2, \ldots, m \tag{33}$$

bulunur. A_k ve B_k kat sayıları

$$H(s) = \frac{(s-a)^m p(s)}{q(s)}$$

$$H_1(s) = \frac{(s-\bar{a})^m p(s)}{q(s)} \tag{34}$$

olmak üzere

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!} \quad H^{(m-k)}(a) \quad \text{ve} \quad B_k = \frac{1}{(m-k)!} \quad H_1^{(m-k)}(\bar{a}) \tag{35}$$

şeklindedir.

8-8 SABİT KATSAYILI LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE ÇÖZÜMÜ

Şimdi n mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem şeklindeki başlangıç değer problemlerinin Laplace dönüşümü ile nasıl çözüleceğini görelim. Yani

$$a \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = F(t) \tag{36}$$

diferansiyel denklemi

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \tag{37}$$

başlangıç koşullarında çözmek istiyoruz.

Önce (36) nolu denklemin terim terim Laplace dönüşümünü alalım.

$$a_0 L\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_1 L\left\{\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right\} + \ldots + a_{n-1} L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} +$$

$$a_n L\{y(t)\} = L\{F(t)\} \tag{38}$$

Teorem 6'yı ve (37) nolu denklemle verilen başlangıç koşullarını kullanarak

$$L\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\}, L\left\{\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\right\}, \ldots, L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} \quad \text{için sırası ile}$$

$$L\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} = s^n L\{y(t)\} - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0)$$

$$= s^n L\{y(t)\} - c_0 s^{n-1} - c_1 s^{n-2} - \ldots - c_{n-1},$$

$$L\left\{\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\right\} = s^{n-1} L\{y(t)\} - s^{n-2} y(0) - s^{n-3} y'(0) - \ldots - y^{(n-2)}(0)$$

$$= s^{n-1} L\{y(t)\} - c_0 s^{n-2} - c_1 s^{n-3} - \ldots - c_{n-2}$$

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = s L\{y(t)\} - y(0) = s L\{y(t)\} - c_0$$

elde edilir. $L\{F(t)\} = f(s)$ ve $L\{y(t)\} = Y(s)$ olarak (38) nolu denklem

$$[a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n] y(s) - c_0 [a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2}$$
$$+ \ldots + a_{n-1}] - c_1 [a_0 s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \ldots + a_{n-2}] - \ldots$$
$$- c_{n-2} [a_0 s + a_1] - c_{n-1} a_0 = f(s) \qquad (39)$$

$F(t)$ bilinen bir fonksiyon olduğundan bunun Laplace dönüşümü $f(s)$ de belli olup (39) nolu denklemde bilinmeyen sadece $y(s)$ dır. Bu cebirsel denklemi çözerek $y(s)$'i bulunuz, daha sonra $y(s)$'in ters Laplace dönüşümünü alarak, yani

$$Y(t) = L^{-1} y(s)$$

denklemini kullanarak $y(t)$'yi hesaplarız.

Örnek 30. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 16y = 5 \sin x \qquad y(0) = \dfrac{dy(0)}{dt} = 0$

başlangıç değer problemini Laplace dönüşümünü kullanarak çözün.

Çözüm: Diferansiyel denklemin önce Laplace dönüşümünü alalım.

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 16 Y(s) = 5 \frac{1}{s^2 + 1} ,$$

başlangıç koşullarını yerine koyarak

$$s^2 Y(s) + 16 Y(s) = 5 \frac{1}{s^2 + 1} , \quad Y(s)(s^2 + 16) = \frac{5}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{5}{s^2 + 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 16}$$

elde edilir. *Y(s)* 'nin ters Laplace dönüşümünü almak için

$$\frac{5}{(s^2 + 1)(s^2 + 16)} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 16}$$

yazalım. Buradan *A, B, C* ve *D* katsayıları

$$5 = (s^2 + 16)(As + B) + (s^2 + 1)(Cs + D)$$

$$= As^3 + Bs^2 + 16As + 16B + Cs^3 + Ds^2 + Cs + D$$

$$A + C = 0$$

$$B + D = 0$$

$$16A + C = 0$$

$$16B + D = 5$$

denklemleri kullanılarak

$$B = \frac{1}{3} , \quad D = -\frac{1}{3} , \quad A = C = 0$$

bulunur.

O halde,

$$\frac{5}{(s^2 + 1)(s^2 + 16)} = \frac{1}{3} \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \frac{1}{s^2 + 16}$$

olup ters Laplace dönüşümü alınarak

$$L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{3} \sin x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$y(x) = \frac{1}{3} \sin x - \frac{1}{12} \sin 4x$$

bulunur.

Örnek 31. $\dfrac{d^3y}{dt^3} - 5\dfrac{d^2y}{dt^2} + 7\dfrac{dy}{dt} - 3y(t) = 20 \sin t$

diferansiyel denklemi

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0, \quad \frac{d^2y(0)}{dt^2} = -2$$

başlangıç koşullarında çözelim.

Başlangıç koşullarını da kullanarak türevlerin Laplace dönüşümleri:

$$L\left\{\frac{d^3y}{dt^3}\right\} = s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3Y(s) + 2$$

$$L\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$$

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

dır.

$$L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

olup diferansiyel denklem

$$s^3Y(s) + 2 - 5s^2Y(s) + 7sY(s) - 3Y(s) = \frac{20}{s^2+1}$$

halini alır. Buradan $Y(s)$ yalnız bırakılarak

$$(s^3 - 5s^2 + 7s - 3)\,Y(s) + 2 = \frac{20}{s^2+1}$$

ve

$$Y(s) = \left(\frac{20}{s^2+1} - 2\right)\frac{1}{s^3 - 5s^2 + 7s - 3} = \frac{20 - 2s^2 - 2}{(s^2+1)(s^3 - 5s^2 + 7s - 3)}$$

$$Y(s) = \left(\frac{-2s^2 + 18}{(s^2+1)(s^3 - 5s^2 + 7s - 3)} \right) = \frac{-2(s^2 - 9)}{(s^2+1)(s^3 - 5s^2 + 7s - 3)}$$

$$= \frac{-2(s-3)(s+3)}{(s^2+1)(s^3 - 5s^2 + 7s - 3)} = \frac{-2(s+3)(s-3)}{(s^2+1)(s-1)^2(s-3)}$$

$$= \frac{-2s - 6}{(s^2+1)(s-1)^2}$$

ve

$$\frac{-2s - 6}{(s^2+1)(s-1)^2} = \frac{As + B}{s^2+1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{s-1}$$

şeklinde kısımlara ayırarak

$$-2s - 6 = (As + B)(s-1)^2 + C(s^2+1) + D(s-1)(s^2+1)$$

$$-2s - 6 = (As + B)(s^2 - 2s + 1) + Cs^2 + C + D(s^3 - s^2 + s - 1)$$

$$= (A + D)s^3 + (B + C - D - 2A)s^2 + (A - 2B + D)s + B + C - D$$

yazılır. Buradan *A, B, C, D* katsayıları için

$$A + D = 0, \quad B + C - D - 2A = 0, \quad A - 2B + D = -2, \quad B + C - D = -6$$

denklemi kullanılarak

$$A = -3, \quad B = 1, \quad C = -4, \quad D = 3 \text{ bulunur.}$$

Şimdi *Y(s)* nin ters Laplace dönüşümünü alalım:

$$L^{-1}\left\{ \frac{-2(s+3)}{(s^2+1)(s-1)^2} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{-3s+1}{s^2+1} \right\} + L^{-1}\left\{ \frac{-4}{(s-1)^2} \right\} + L^{-1}\left\{ \frac{3}{s-1} \right\}$$

ve

$$y(t) = -3\cos t + \sin t - 4te^t + 3e^t$$

elde edilir.

Örnek 32. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = te^{-t}$

$$y(0) = 1 \quad , \quad \frac{dy(0)}{dt} = 2$$

başlangıç değer problemini Laplace dönüşümünü kullanarak çözün.

Önce diferansiyel denklemin Laplace dönüşümünü yazalım, sonra başlangıç koşullarını yerine koyalım:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2s\,Y(s) - y(0) + Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

ve

$$(s^2 + 2s + 1)\,Y(s) = s + 4 + \frac{1}{(s+1)^2}$$

ve buradan $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)^2} + \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^4} = \frac{(s+1)-1}{(s+1)^2} + \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^4}$$

veya

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^4}$$

olup ters Laplace dönüşümü alınarak

$$L^{-1}\{\{Y(s)\}\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 3L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^4}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^k}\right\} = \frac{e^{at}t^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{olduğu anımsanarak}$$

$$y(t) = e^{-t} + 3te^{-t} + \frac{e^{-t}t^3}{3!}$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

1. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{-t} \\ y(0) = 0\,,\ \dfrac{dy(0)}{dt} = 1 \end{cases}$

Yanıt: $y(t) = \dfrac{1}{5}\left(e^{-t} - e^{t}\cos t + 7e^{t}\sin t\right)$

2. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0 \\ y(0) = 1\,,\ \dfrac{dy(0)}{dt} = 2 \end{cases}$

Yanıt: $y(t) = e^{2t}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} - 2y = e^{5t} \\ y(0) = 3 \end{cases}$

Yanıt: $y(t) = \dfrac{8}{3}e^{2t} + \dfrac{1}{3}e^{5t}$

4. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + y = e^{-2t}\sin t \\ y(0) = 0 \\ \dfrac{dy(0)}{dt} = 0 \end{cases}$

Yanıt: $y(t) = \dfrac{1}{8}(\sin t - \cos t) + \dfrac{e^{-2t}}{8}(\sin t + \cos t)$

5. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 6y = 2 \\ y(0) = 1 \\ \dfrac{dy(0)}{dt} = 0 \end{cases}$

Yanıt: $y(t) = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{15}e^{3t} + \dfrac{4}{5}e^{-2t}$

6. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 2y = e^{t} \\ y(0) = 0 \\ \dfrac{dy(0)}{dt} = 1 \end{cases}$

Yanıt: $y(t) = \dfrac{1}{3}\left(e^{t} + \dfrac{2}{3}e^{t} - \dfrac{2}{3}e^{-2t}\right)$

7. $\dfrac{d^3y}{dt^3} + 4\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 2y = 10\cos t$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 3 \end{cases}$$

Yanıt: $y(t) = -e^{-2t} + 2e^{-t} - 2te^{-t} - \cos t + \sin t$

8. $$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0 \\ y(0) = 2 \\ \dfrac{dy(0)}{dt} = 4 \end{cases}$$

Yanıt: $y(t) = e^t(2\cos 2t + \sin 2t)$

9. $$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{5t} \\ y(0) = 1 \\ \dfrac{dy(0)}{dt} = 2 \end{cases}$$

Yanıt: $y(t) = \dfrac{1}{12}e^{5t} + \dfrac{1}{4}e^{t} + \dfrac{2}{3}e^{2t}$

10. $$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + m^2y = k\cos nt \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Yanıt: $y(t) = \dfrac{k}{m^2 - n^2}(\cos nt - \cos mt)$

11. $$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + y = \sin 2t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Yanıt: $y(t) = \dfrac{5}{3}\sin t - \dfrac{1}{3}\sin 2t$

Laplace Transformasyon Tablosu

Tablo A.1 Operatörler

	f(s) (Res > α)	F(t) (t > 0)
1	$\int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt = L\{F\}$	$F(t)$
2	$f(s)$	$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \to \infty} \int_{\gamma - i\beta}^{\gamma + i\beta} e^{\alpha} f(z)\,dz$
3	$s\,f(s) - F(0)$	$F'(t)$
4	$s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \ldots - F^{(n-1)}(0)$	$F^{(n)}(t)$
5	$\frac{1}{s} f(s)$	$\int_0^t F(t)\,dt$
6	$e^{-bs} f(s) \quad (b > 0)$	$\begin{cases} F(t-b) & \text{if } t > b \\ 0 & \text{if } t < b \end{cases}$
7	$f(s)\,g(s)$	$\int_0^t F(\tau)\,G(t-\tau)\,dt$
8	$f'(s)$	$-t\,F(t)$

Laplace Transformasyon Tablosu (Devamı)

9	$f^{(n)}(s)$	$(-1)^n t^n F(t)$
10	$\int_0^\infty f(x)\,dx$	$\frac{1}{t} F(t)$
11	$f(s-a)$	$e^{at} F(t)$
12	$f(cs)\ (c > 0)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{t}{c}\right)$
13	$\frac{\int_0^a e^{-st} F(t)\,dt}{1 - e^{-as}}$ $(a > 0)$	$F(t)$ if $F(t+a) = F(t)$
14	$\frac{\int_0^a e^{-st} F(t)\,dt}{1 + e^{-as}}$ $(a > 0)$	$F(t)$ if $F(t+a) = -F(t)$
15	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+k}}$ $(k > 0)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(n+k)} t^{n+k-1}$

Tablo A.2 Laplace dönüşümleri

	f (s)	F(t) $(t > 0)$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

Laplace Transformasyon Tablosu (Devamı)

4	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$	$2\sqrt{t/\pi}$
6	$s^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{2^n t^{n-\frac{1}{2}}}{1 \times 3 \times 5 \ldots (2n-1)\sqrt{\pi}}$
7	$\frac{\Gamma(k)}{s^k}$ $(k > 0)$	t^{k-1}
8	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
10	$\frac{1}{(s-a)^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
11	$\frac{\Gamma(k)}{(s-a)^k}$ $(k > 0)$	$t^{k-1} e^{at}$
12	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
13	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
14	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{(b-c)e^{at} + (c-a)e^{bt} + (a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
15	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{1}{a}\sin at$

Laplace Transformasyon Tablosu (Devamı)

16	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
17	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \sin h\, at$
18	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cos h\, at$
19	$\frac{1}{s\left(s^2 + a^2\right)}$	$\frac{1}{a^2}(1 - \cos at)$
20	$\frac{1}{s^2\left(s^2 + a^2\right)}$	$\frac{1}{a^3}(at - \sin at)$
21	$\frac{1}{\left(s^2 + a^2\right)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cos at)$
22	$\frac{s}{\left(s^2 + a^2\right)^2}$	$\frac{1}{2a} \sin at$
23	$\frac{s^2}{\left(s^2 + a^2\right)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin at + at \cos at)$
24	$\frac{s^2 - a^2}{\left(s^2 + a^2\right)^2}$	$t \cos at$
25	$\frac{s}{\left(s^2 + a^2\right)\left(s^2 + b^2\right)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{\cos at - \cos bt}{b^2 - a^2}$
26	$\frac{1}{(s - a)^2 + b^2}$	$\frac{1}{b} e^{at} \sin bt$
27	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$	$e^{at} \cos bt$

Laplace Transformasyon Tablosu (Devamı)

28	$\frac{3a^2}{s^3 + a^3}$	$e^{-at} - e^{at/2}\left(\cos\frac{at\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{at\sqrt{3}}{2}\right)$
29	$\frac{4a^3}{s^4 + 4a^4}$	$\sin at \cosh at - \cos at \sinh at$
30	$\frac{s}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{1}{2a^2}\sin at \sinh at$
31	$\frac{1}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^3}(\sinh at - \sin at)$
32	$\frac{s}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh at - \cos at)$
33	$\frac{8a^3s^2}{(s^2 + a^2)^3}$	$(1 + a^2t^2)\sin at - at\cos at$
34[1]	$\frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n$	$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$
35	$\frac{s}{(s-a)\sqrt{s-a}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1 + 2at)$
36	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
37	$\frac{1}{\sqrt{s} + a}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - a e^{a^2t}\operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$
38	$\frac{\sqrt{s}}{s - a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + a e^{a^2t}\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$
39	$\frac{\sqrt{s}}{s + a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \frac{2a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2t}\int_0^{a\sqrt{t}}\exp(\lambda^2)\,d\lambda$

[1] $L_n(t)$ n dereceden Laguerre polinomudur.

Laplace Transformasyon Tablosu (Devamı)

40	$\frac{1}{\sqrt{s}\left(s-a^2\right)}$	$\frac{1}{a}e^{a^2t}\,\mathrm{erf}\left(a\sqrt{t}\right)$
41	$\frac{1}{\sqrt{s}\left(s+a^2\right)}$	$\frac{2}{a\sqrt{\pi}}e^{-a^2t}\int_0^{a\sqrt{t}}e^{\lambda^2}d\lambda$
42	$\frac{b^2-a^2}{\left(s-a^2\right)\left(b+\sqrt{s}\right)}$	$e^{a^2t}\left[b-a\,\mathrm{erf}\left(a\sqrt{t}\right)\right]-be^{b^2t}\,\mathrm{erfc}\left(b\sqrt{t}\right)$
43	$\frac{1}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+a\right)}$	$e^{a^2t}\,\mathrm{erfc}\left(a\sqrt{t}\right)$
44	$\frac{1}{(s+a)\sqrt{s+b}}$	$\frac{1}{\sqrt{b-a}}e^{-at}\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{b-a}\,\sqrt{t}\right)$
45	$\frac{b^2-a^2}{\sqrt{s}\left(s-a^2\right)\left(\sqrt{s}+b\right)}$	$e^{a^2t}\left[\frac{b}{a}\,\mathrm{erf}\left(a\sqrt{t}\right)-1\right]+e^{b^2t}\,\mathrm{erfc}\left(b\sqrt{t}\right)$
46[1]	$\frac{(1-s)^n}{s^{n+\frac{1}{2}}}$	$\frac{n!}{(2n)!\sqrt{\pi t}}H_{2n}\left(\sqrt{t}\right)$
47	$\frac{(1-s)}{s^{n+1}\sqrt{s}}$	$\frac{n!}{\sqrt{\pi}\,(2n+1)!}H_{2n+1}\left(\sqrt{t}\right)$
48[2]	$\frac{\sqrt{s+2a}}{\sqrt{s}}-1$	$ae^{-at}\left[I_1(at)+I_0(at)\right]$
49	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\,\sqrt{s+b}}$	$e^{-\frac{1}{2}(a+b)t}I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
50	$\frac{\Gamma(k)}{(s+a)^k(s+b)^k}\quad(k>0)$	$\sqrt{\pi}\left(\frac{t}{a-b}\right)^{k-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(a+b)t}I_{k-\frac{1}{2}}\left(\frac{a-b}{2}t\right)$

1 $H_n(x)$ Hermite polinomudur, $H_n(x)=e^{x^2}\left(d^n/dx^n\right)\left[e^{-x^2}\right]$

2 $J_n(x)=i^{-n}J_n(ix)$, burada J_n birinci çeşit Bessel's fonksiyonudur.

Laplace Transformasyon Tablosu (Devamı)

51	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}\,\sqrt{s+b}\,(s+b)}$	$te^{-\frac{1}{2}(a+b)t}\left[I_0\left(\dfrac{a-b}{2}t\right)+I_1\left(\dfrac{a-b}{2}t\right)\right]$
52	$\dfrac{\sqrt{s+2a}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+2a}+\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{t}e^{-at}I_1(at)$
53	$\dfrac{(a-b)^k}{\left(\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}\right)^{2k}}$ $(k>0)$	$\dfrac{k}{t}te^{-\frac{1}{2}(a+b)t}I_k\left(\dfrac{a-b}{2}t\right)$
54	$\dfrac{\left(\sqrt{s+a}+\sqrt{s}\right)^{-2v}}{\sqrt{s}\,\sqrt{s+a}}$ $(v>-1)$	$\dfrac{1}{a^v}e^{-\frac{1}{2}at}I_v\left(\dfrac{1}{2}at\right)$
55	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
56	$\dfrac{\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^v}{\sqrt{s^2+a^2}}$ $(v>-1)$	$a^vJ_v(at)$
57	$\dfrac{1}{\left(s^2+a^2\right)^k}$ $(k>0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}}J_{k-\frac{1}{2}}(at)$
58	$\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^k$ $(k>0)$	$\dfrac{ka^k}{t}J_k(at)$
59	$\dfrac{\left(s-\sqrt{s^2-a^2}\right)^v}{\sqrt{s^2-a^2}}$ $(v>-1)$	$a^vI_v(at)$
60	$\dfrac{1}{\left(s^2-a^2\right)^k}$ $(k>0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}}I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
61	$\dfrac{e^{-ks}}{s}$	$S_k(t)=\begin{cases}0 \text{ iken } 0<t<k\\ 1 \text{ iken } t>k\end{cases}$

Laplace Transformasyon Tablosu (Devamı)

62	$\frac{e^{-ks}}{s^2}$	$\begin{cases} 0 & \text{iken } 0 < t < k \\ t-k & \text{iken } t > k \end{cases}$
63	$\frac{e^{-ks}}{s^{\mu}} \quad (\mu > 0)$	$\begin{cases} 0 & \text{iken } 0 < t < k \\ \frac{(t-k)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} & \text{iken } t > k \end{cases}$
64	$\frac{1-e^{-ks}}{s}$	$\begin{cases} 1 & \text{iken } 0 < t < k \\ 0 & \text{iken } t > k \end{cases}$
65	$\frac{1}{s\left(1-e^{-ks}\right)} = \frac{1+\coth\frac{1}{2}ks}{2s}$	$1 + [\,t/k\,] = n$ iken $(n-1)k < t < nk$ $(n = 1, 2, \ldots)$
66	$\frac{1}{s\left(e^{ks}-a\right)}$	$\begin{cases} 0 \text{ iken } 0 < t < k \\ 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} \\ \quad nk < t < (n+1)k \text{ iken} \\ \qquad (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$
67	$\frac{1}{s}\tanh ks$	$M(2k, t) = (-1)^{n-1}$ iken $2k(n-1) < t < 2kn$ $(n = 1, 2, \ldots)$
68	$\frac{1}{s\left(1+e^{-ks}\right)}$	$\frac{1}{2}M(k, t) + \frac{1}{2} = \frac{1-(-1)^n}{2}$ iken $(n-1)k < t < nk$
69	$\frac{1}{s^2}\tanh ks$	$H(2k, t)$
70	$\frac{1}{s \sin h\, ks}$	$F(t) = 2(n-1)$ iken $(2n-3)k < t < (2n-1)k \quad (t>0)$

Laplace Transformasyon Tablosu (Devamı)

71	$\frac{1}{s \cosh ks}$	$M(2k, t+3k)+1 = 1+(-1)^n$ iken $(2n-3)k < t < (2n-1)k$ $(t>0)$
72	$\frac{k}{s} \coth ks$	$F(t) = 2n-1$ iken $2k(n-1) < t < 2kn$
73	$\frac{1}{s^2+k^2} \coth \frac{\pi s}{2k}$	$\lvert \sin kt \rvert$
74	$\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$	$\frac{1}{2}(\sin t + \lvert \sin t \rvert)$
75	$\frac{1}{s} e^{-(k/s)}$	$J_0(2\sqrt{kt})$
76	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-(k/s)}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{kt}$
77	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{k/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{kt}$
78	$\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-(k/s)}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sin 2\sqrt{kt}$
79	$\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{k/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sinh 2\sqrt{kt}$
80	$\frac{1}{s^\mu} e^{-(k/s)}$ $(\mu > 0)$	$\left(\frac{t}{k}\right)^{(\mu-1)/2} J_{\mu-1}(2\sqrt{kt})$
81	$\frac{1}{s^\mu} e^{k/s}$ $(\mu > 0)$	$\left(\frac{t}{k}\right)^{(\mu-1)/2} I_{\mu-1}(2\sqrt{kt})$
82	$e^{-k\sqrt{s}}$ $(k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$

Laplace Transformasyon Tablosu (Devamı)

83	$\frac{1}{s} e^{-k\sqrt{s}}$ $(k \geq 0)$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
84	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-k\sqrt{s}}$ $(k \geq 0$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$
85	$\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-k\sqrt{s}}$ $(k \geq 0)$	$2\sqrt{\frac{1}{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right) - k \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
86	$\frac{a e^{-k\sqrt{s}}}{s\left(a + \sqrt{s}\right)}$ $(k \geq 0)$	$-e^{ak} e^{a^2 t} \operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t} + \frac{k}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
87	$\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{\sqrt{s}\left(a + \sqrt{s}\right)}$ $(k \geq 0)$	$e^{ak} e^{a^2 t} \operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t} + \frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
88	$\frac{e^{-k\sqrt{s(s+a)}}}{\sqrt{s}\,(s+a)}$	$\begin{cases} 0 & \text{iken } 0 < t < k \\ e^{-\frac{1}{2}at} I\left(\frac{1}{2} a\sqrt{t^2 - k^2}\right) & \text{iken } t > k \end{cases}$
89	$\frac{e^{-k\sqrt{s^2 + a^2}}}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$\begin{cases} 0 & \text{iken } 0 < t < k \\ J_0\left(a\sqrt{t^2 - k^2}\right) & \text{iken } t > k \end{cases}$
90	$\frac{e^{-k\sqrt{s^2 - a^2}}}{\sqrt{s^2 - a^2}}$	$\begin{cases} 0 & \text{iken } 0 < t < k \\ I_0\left(a\sqrt{t^2 - k^2}\right) & \text{iken } t > k \end{cases}$
91	$\frac{e^{-k\left(\sqrt{s^2 + a^2} - s\right)}}{\sqrt{s^2 + a^2}}$ $(k \geq 0)$	$J_0\left(a\sqrt{t^2 + 2kt}\right)$

Laplace Transformasyon Tablosu (Devamı)

92	$e^{-ks} - e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}$	$\begin{cases} 0 & \text{iken } 0 < t < k \\ \dfrac{ak}{\sqrt{t^2-k^2}} J_1\left(a\sqrt{t^2-k^2}\right) & \text{iken } t > k \end{cases}$
93	$e^{-k\sqrt{s^2+a^2}} - e^{-ks}$	$\begin{cases} 0 & \text{iken } 0 < t < k \\ \dfrac{ak}{\sqrt{t^2-k^2}} I_1\left(a\sqrt{t^2-k^2}\right) & \text{iken } t > k \end{cases}$
94	$\dfrac{a^\nu e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}\left(\sqrt{s^2+a^2}+s\right)^\nu}$ $(\nu > -1)$	$\begin{cases} 0 & \text{iken } 0 < t < k \\ \left(\dfrac{t-k}{t+k}\right)^{\frac{1}{2}\nu} J_\nu\left(a\sqrt{t^2-k^2}\right) & \text{iken } t > k \end{cases}$
95	$\dfrac{1}{s} \log s$	$\Gamma(1) - \log t \quad [\Gamma(1) = -0.5772]$
96	$\dfrac{1}{s^k} \log s \qquad (k > 0)$	$t^{k-1}\left\{\dfrac{\Gamma(k)}{\left[\Gamma(k)\right]^2} - \dfrac{\log t}{\Gamma(k)}\right\}$
97[1]	$\dfrac{\log s}{s-a} \quad (a > 0)$	$e^{at}\left[\log a + E_1(at)\right]$
98[2]	$\dfrac{\log s}{s^2+1}$	$\cos t \, \mathrm{Si}\, t - \sin t \, \mathrm{Ci}\, t$
99[2]	$\dfrac{s \log s}{s^2+1} \quad (a > 0)$	$-\sin t \, \mathrm{Si}\, t - \cos t \, \mathrm{Ci}\, t$
100[1]	$\dfrac{1}{s} \log(1+ks) \qquad (k > 0)$	$E_1\left(\dfrac{t}{k}\right)$

[1] $E_1(t)$ Üstel integral fonksiyonu olarak tanımlanır.

[2] $\mathrm{Ci}\, t = -\int_t^\infty \dfrac{\cos r}{r} dr$ ve $\mathrm{Si}\, t = \int_0^t \dfrac{\sin r}{r} dr$

Laplace Transformasyon Tablosu (Devamı)

101	$\log \frac{s-a}{s-b}$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt}-e^{at}\right)$
102	$\frac{1}{s}\log\left(1+k^2s^2\right)$	$-2\,\mathrm{Ci}\left(\frac{t}{k}\right)$
103	$\frac{1}{s}\log\left(s^2+a^2\right)$ $(a>0)$	$2\log a - 2\,\mathrm{Ci}(at)$
104	$\frac{1}{s^2}\log\left(s^2+a^2\right)$ $(a>0)$	$\frac{2}{a}\left[at\log a + \sin at - at\,\mathrm{Ci}(at)\right]$
105	$\log\frac{s^2+a^2}{s^2}$	$\frac{2}{t}\left(1-\cos at\right)$
106	$\log\frac{s^2-a^2}{s^2}$	$\frac{2}{t}\left(1-\cosh at\right)$
107	$\arctan\frac{k}{s}$	$\frac{1}{t}\sin kt$
108	$\frac{1}{s}\arctan\frac{k}{s}$	$\mathrm{Si}(kt)$
109	$e^{k^2s^2}\,\mathrm{erfc}(ks)$ $(k>0)$	$\frac{1}{k\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{4k^2}\right)$
110	$\frac{1}{s}e^{k^2s^2}\,\mathrm{erfc}(ks)$ $(k>0)$	$\mathrm{erf}\left(\frac{t}{2k}\right)$
111	$e^{ks}\,\mathrm{erfc}\sqrt{ks}$ $(k>0)$	$\frac{\sqrt{k}}{\pi\sqrt{t}\,(t+k)}$
112	$\frac{1}{\sqrt{s}}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{ks}\right)$	$\begin{cases} 0 & \text{iken } 0<t<k \\ (\pi t)^{-1/2} & \text{iken } t>k \end{cases}$

Laplace Transformasyon Tablosu (Devamı)

113	$\frac{1}{\sqrt{s}}\, e^{ks}\, \mathrm{erfc}\left(\sqrt{ks}\right)$ $(k > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\,(t+k)}}$
114	$\mathrm{erf}\left(\frac{k}{\sqrt{s}}\right)$	$\frac{1}{\pi t}\sin\left(2k\sqrt{t}\right)$
115	$\frac{1}{\sqrt{s}}\, e^{k^2/s}\, \mathrm{erfc}\left(\frac{k}{\sqrt{s}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-2k\sqrt{t}}$
116	$\pi e^{-ks} I_0(ks)$	$\begin{cases} \left[t(2k-t)\right]^{-1/2} & \text{iken } 0 < t < 2k \\ 0 & \text{iken } t > 2k \end{cases}$
117	$e^{-ks} I_1(ks)$	$\begin{cases} \left(\frac{k-t}{\pi k\sqrt{t\,(2k-t)}}\right) & \text{iken } 0 < t < 2k \\ 0 & \text{iken } t > 2k \end{cases}$
118	$e^{as} E_1(as)$	$\frac{1}{t+a}$ $(a > 0)$
119	$\frac{1}{a} - se^{as} E_1(as)$	$\frac{1}{(t+a)^2}$ $(a > 0)$
120	$\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}\, s\right) \cos s + \mathrm{Ci}\, s \sin s$	$\frac{1}{t^2+1}$
121	$\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}\, s\right) \sin s - \mathrm{Ci}\, s \cos s$	$\frac{t}{t^2+1}$

Fourier Transformasyon Tablosu

	$f_s(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$	$F(x)$ $(0 < x < \pi)$
1	$\int_0^a F(x) \sin nx \, dx = s_n\{F\}$	$F(x)$
2	$f_s(n)$	$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n) \sin nx$
3	$-n^2 f_s(n) + n[F(0) - (-1)^n F(\pi)]$	$F''(x)$
4	$\frac{1}{n^2} f_s(n)$	$\frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - r) F(r) dr - \int_0^x (x - r) F(r) dr$
5	$(-1)^{n+1} f_s(n)$	$F(\pi - x)$
6	$2 f_s(n) \cos nc$	$F_1(x + c) + F_1(x - c)$
7	$\frac{2}{n} f_s(n) h_s(n)$	$\int_0^{\pi} H(y) \int_{x-y}^{x+y} F_1(r) dr \, dy$
8	$\frac{\pi}{n}$	$\pi - x$
9	$\frac{1}{n}(-1)^{n+1}$	$\frac{x}{\pi}$
10	$\frac{1}{n}[1 - (-1)^n]$	1
11	$\frac{\pi}{n} \cos nc$ $(0 < c < \pi)$	$\begin{cases} -x & \text{if } x < c \\ \pi - x & \text{if } x > c \end{cases}$
12	$\frac{\pi}{n^2} \sin nc$ $(0 < c < \pi)$	$\begin{cases} (n - c)x & \text{if } x \le c \\ (\pi - x)c & \text{if } x \ge c \end{cases}$

BÖLÜM 9

Sturm–Liouville Sınır–Değer Problemleri ve Fourier Serileri

9-1 GİRİŞ

Bir diferansiyel denklemin bazen, bilinmeyen katsayılar içeren genel çözümünü bulmakla yetiniriz. Bazı durumlarda ise, diferansiyel denklemin belirli şartları sağlayan çözümlerinin bulunması gerekir. Bu şartlar genellikle problemin yapısında vardır veya doğrudan denklemle birlikte verilir. Adı geçen şartlar yalnız bir noktaya ait özel şartlar ise **başlangıç şartları,** eğer iki veya daha fazla noktayı kapsayan şartlar ise o zaman **sınır şartları** adını alır.

Örnek olarak,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - g = 0, \qquad y(0) = y_0, \qquad y'(0) = v_0 \tag{1}$$

denklemini ve başlangıç şartlarını gözönüne alalım. Bu denklem, g sabit ivmesi ile doğrusal hareket yapan bir hareketlinin denklemidir. Başlangıç şartlarından anlaşıldığına göre, $t = 0$ anında hareketli cisim başlangıç noktasından y_0 uzaklığında bulunmakta olup aynı anda hızı v_0 dır. Denk. 1 'in bu şartlara uyan genel çözümü,

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 \tag{2}$$

olur.

Biz şimdiye kadar, diferansiyel denklemlerin integrasyon sabitlerini içeren genel çözümleriyle veya yukarıda verilen örnekte olduğu gibi yalnız başlangıç şartlarına uyan çözümlerle ilgilendik. Şimdi ise, bazı diferansiyel denklemlerin in-

tegrasyon sabitlerinin belirlenmesinde, bir $a \le x \le b$ aralığının iki ucunda, bir başka deyişle iki noktada verilen ve "sınır-şartları" olarak adlandırılan şartları gözönüne alacağız.

Değişken katsayılı, ikinci mertebeden, homogen ve lineer bir diferansiyel denklem, sınır-şartları ile birlikte genel olarak aşağıdaki şekilde verilir.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{3}$$

$$A_1y(a) + A_2y'(a) = 0$$

$$B_1y(b) + B_2y'(b) = 0 \tag{3'}$$

Burada, $a_0(x) \neq 0$ dır ve $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ fonksiyonları, $a \le x \le b$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. A_1, A_2, B_1 ve B_2 ise reel sayılardır. Yalnız, bu sayılardan A_1 ve A_2'nin ikisi birden veya B_1 ve B_2'nin ikisi birden "sıfır" olamaz. Bu şartlar sağlandığında Denk. 3 'ün verilen sınır şartlarına uyan bir çözümü, $y(x) = 0$ olur. Bu çözüme **sıfır çözümü** denir. Amacımız, eğer varsa, "sıfır" çözümünden farklı çözümleri bulmaktır.

$y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonları, (3) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olsun. O zaman genel çözüm,

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{4}$$

olur. Bu çözüm, sınır-şartlarını sağlamak durumunda olduğundan,

$$A_1[c_1y_1(a) + c_2y_2(a)] + A_2[c_1y_1'(a) + c_2y_2'(a)] = 0$$

$$B_1[c_1y_1(b) + c_2y_2(b)] + B_2[c_1y_1'(b) + c_2y_2'(b)] = 0$$

yazılır. Her iki denklem, c_1 ve c_2 bilinmeyenlerine göre düzenlenirse aşağıda görülen denklem sistemi elde edilir.

$$c_1[A_1y_1(a) + A_2y_1'(a)] + c_2[A_1y_2(a) + A_2y_2'(a)] = 0$$

$$c_1[B_1y_1(b) + B_2y_1'(b)] + c_2[B_1y_2(b) + B_2y_2'(b)] = 0 \tag{5}$$

Görülüyor ki, $c_1 = c_2 = 0$, bu denklem sisteminin bir çözümüdür. c_1 ve c_2'nin "sıfır" değerleri Denk. 4 'de yerine konursa "sıfır" çözümü elde edilir.

Önceden biliyoruz ki, (5) denklem sisteminde c_1 ve c_2 'nin "sıfır" çözümünden farklı bir çözümün olabilmesi için katsayılar determinantının sıfır 'a eşit olması gerekmektedir. Öyle ise, (3) denkleminin "sıfır" çözümünden farklı ve birbiri ile lineer bağımsız iki $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümünün bulunabilmesi için gerekli ve yeter şart,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1y_1(a) + A_2y_1'(a) & A_1y_2(a) + A_2y_2'(a) \\ B_1y_1(b) + B_2y_1'(b) & B_1y_2(b) + B_2y_2'(b) \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

olmasıdır.

Örnek 1. $y'' - 9y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$ (7)

sınır-değer problemini çözünüz.

Denklemin genel çözümü,

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$$

dır. Sınır-şartları uygulanırsa,

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1e^{3} + c_2e^{-3} = 0$$

bulunur. c_1 ve c_2 ye göre elde edilen bu denklem sisteminin katsayılar determinantı,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{3} & e^{-3} \end{vmatrix} = e^{-3} - e^{3} \neq 0$$

olduğundan, Denk. 7 'nin, verilen sınır-şartlarına uyan tek çözümü "sıfır" çözümüdür.

Örnek 2. $y'' + y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0$ (8)

sınır-değer problemini çözünüz.

Denklemin genel çözümü,

$$y = c_1\sin x + c_2\cos x$$

dır. Sınır şartları uygulanırsa, $c_2 = 0$ ve c_1 'in sıfır 'dan farklı herhangi bir sabit sayı olduğu açıkça görülür. Buna göre, Denk. 8 'in sınır şartlarına uyan bir çözümü,

$$y = c_n\sin x, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (9)$$

dır. Bu demektir ki, burada aranan çözüm, bir parametreli bir çözüm ailesidir.

Örnek 3. $y'' + \pi^2 y = 0$

$$y(0) + y(1) = 0, \qquad y'(0) + y'(1) = 0$$

sınır-değer problemini çözünüz.

Diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = c_1 \sin \pi x + c_2 \cos \pi x \tag{10}$$

dır. Birinci sınır şartı uygulanırsa,

$$y(0) + y(1) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 + c_1 \sin \pi + c_2 \cos \pi$$

$$= 0 + c_2 + 0 - c_2 = 0$$

elde edilir. Görülüyor ki, birinci sınır şartının uygulanması, c_1 ve c_2 arasında herhangi bir denklem veya bir bağıntı vermemiştir. c_1 ve c_2'nin her keyfi değeri için birinci sınır-şartının sağlandığı açıkça görülmektedir.

İkinci sınır şartı uygulanırsa,

$$y(0) + y'(1) = c_1 \pi \cos 0 - c_2 \pi \sin 0 + c_1 \pi \cos \pi - c_2 \pi \sin \pi$$

$$= c_1 \pi - 0 - c_1 \pi - 0 = 0$$

elde edilir. Öyle ise, c_1 ve c_2 'nin her keyfi değeri için ikinci sınır şartı da sağlanmaktadır. Bunun anlamı, (10) denklemi ile verilen $y = y(x)$ fonksiyonu, verilen sınır-değer probleminin bir çözümüdür. Burada dikkat edilmesi gereken husus, denklemin genel çözümünün, iki ayrı çözüm ailesinin bir lineer kombinasyonu olmasıdır. Çözüm ailelerinden biri, $y_1(x) = \sin \pi x$ fonksiyonunun sonsuz sayıda herhangi keyfi sabit sayılarla çarpılması sonucu elde edilen fonksiyonlar ailesidir. İkinci aile ise, $y_2(x) = \cos \pi x$ fonksiyonunu, gene sonsuz sayıda herhangi keyfi sabit sayılarla çarpılması sonucu elde edilen fonksiyonlar ailesidir.

Bu durumda genel çözüm,

$$y = A_m \sin \pi x + B_n \cos \pi x, \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olur.

9-2 STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİ KARAKTERİSTİK DEĞERLER, KARAKTERİSTİK FONKSİYONLAR

Sınır değer problemleri arasında Sturm-Liouville probleminin önemli bir yeri vardır. Genel olarak, sınır-değer problemi denildiği zaman ilk akla gelen, Sturm-Liouville problemidir.

Şimdi aşağıda verilen (11) numaralı diferansiyel denklem ve (12) numaralı sınır-şartları birlikte gözönüne alınırsa,

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right] y = 0 \tag{11}$$

$$\begin{aligned} A_1 y(a) + A_2 y'(a) &= 0 \\ B_1 y(b) + B_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

olur ve bu problem, **Sturm-Liouville problemi** adını alır. Burada, p, q ve r fonksiyonları, $a \le x \le b$ aralığındaki bütün x değerleri için reel fonksiyonlardır ve bu aralıkta q ve r fonksiyonları ile p fonksiyonunun türevi süreklidir. λ sabit sayısı ise, x'e bağlı olmayan bir parametredir. Ayrıca, (a, b) aralığında her x değeri için daima $p(x) > 0$ ve $r(x) > 0$ dır. A_1, A_2, B_1 ve B_2 sabit sayıları ise, yukarıda (3) numaralı sınır-değer probleminde tarif edilen reel sayılardır.

Aşağıda çözümleri verilen örnek problemler, yukarıda tartışılan problemlerin devamı niteliğinde olup bunların her biri Sturm-Liouville problemidir. Bu problemlerin çözümleri burada ayrıntılı şekilde ele alınacaktır.

Örnek 4. $y'' + \lambda y = 0$ (13)

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \tag{14}$$

sınır-değer problemini çözünüz.

Bu problem, özel bir Sturm-Liouville probleminden başka birşey değildir. Denk. 11 'de $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ ve $r(x) = 1$ alınırsa (13) denklemi elde edilir. Ayrıca, (12) denklemi ile tarif edilen sınır-şartları ile (14) denklemi ile verilen sınır şartları karşılaştırılırsa,

$a = 0$, $b = \pi$ ve $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $B_1 = 1$, $B_2 = 0$ olur.

Yukarıda verilen özel Sturm-Liouville probleminin "sıfır" çözümünden başka bir çözümünü bulmak için, λ 'nın üç ayrı halini $(\lambda = 0, \lambda < 0$ ve $\lambda > 0)$ ayrı ayrı gözönüne almak gerekmektedir.

(i) $\lambda = 0$. Bu durumda, (13) denkleminin genel çözümü,

$$y = c_1 + c_2 x \tag{15}$$

olur. (14) numaralı sınır şartları genel çözüme ayrı ayrı uygulanırsa, açıkça görülür ki, $c_1 = c_2 = 0$ elde edilir. Bunun anlamı, $\lambda = 0$ için yukarıda verilen sınır-değer probleminin tek çözümü, "sıfır" çözümüdür.

(ii) $\lambda < 0$. Bu durumda, (13) denklemine ait yardımcı denklemin kökleri, $\pm\sqrt{-\lambda}$ dır. Burada $\pm\sqrt{-\lambda} = \alpha$ ile gösterilirse, adı geçen kökler $+\alpha$ ve $-\alpha$ gibi biribirinden farklı iki reel sayıdır. O zaman, genel çözüm,

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} \tag{16}$$

olur. Şimdi, (14) sınır-şartları Denk. 16 'ya uygulanırsa,

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1 e^{\alpha\pi} + c_2 e^{-\alpha\pi} = 0$$

elde edilir. Burada katsayılar determinantı $\Delta \neq 0$ olduğundan, $\lambda < 0$ halinde de sınır-değer probleminin tek çözümü "sıfır" çözümüdür.

(iii) $\lambda > 0$. Bu durum oldukça farklıdır. $\lambda > 0$ olduğundan, yardımcı denklemin kökleri $\pm\sqrt{-\lambda} = \pm\sqrt{\lambda}\,i$ şeklinde iki eşlenik kompleks sayıdır. O zaman, (13) denkleminin genel çözümü,

$$y = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\,x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\,x \tag{17}$$

olur. Şimdi, (14) numaralı sınır-şartlarını sıra ile bu genel çözüme uygulayalım. Önce birinci sınır-şartı ele alınırsa,

$$y(0) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0$$
$$= 0 + c_2 = 0$$

olur. Buradan $c_2 = 0$ bulunur. İkinci sınır şartı (17) denklemine uygulanırsa,

$$y(\pi) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi + c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,\pi$$
$$= c_1 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi + 0 = 0$$

veya buradan,

$$c_1 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0 \tag{18}$$

elde edilir.

(18) denklemi, $c_1 = 0$ olduğu zaman sağlanır. Ayrıca, $c_2 = 0$ olduğu gözönüne alınırsa bu durum bize "sıfır" çözümünü verir. İkinci durum, $c_1 \neq 0$ olması ve

$$\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0 \tag{19}$$

olması halinde (18) denklemi sağlanır. Bu durumda,

$$\sqrt{\lambda_n}\ \pi = n\pi, \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

veya

$$\lambda_n = n^2$$

değerleri (19) denklemini sağlar. Her n değerine karşılık olan c_1 değeri c_n ile gösterilirse, $\lambda > 0$ halinde ve sıfır çözümü dışında, yukarıda verilen Sturm-Liouville probleminin çözümü,

$$\varnothing_n(x) = c_n \sin nx, \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{20}$$

elde edilir. Burada, c_1, c_2, c_3 ... katsayıları sıfır 'dan farklı herhangi keyfi sabit sayılardır.

Şimdi önemle belirtelim ki, (13) denklemi herşeyden önce bir ikinci mertebe diferansiyel denklem olduğu halde bu denklemin çözümü, şimdiye kadar olduğu gibi hiç integrasyon sabiti içermeyen veya herhangi iki keyfi sabit sayı içeren bir çözüm değildir. Burada (20) denklemi ile verilen genel çözüm, $c_1 \sin x$, $c_2 \sin 2x$, $c_3 \sin 3x$, ... gibi ve herbiri bir çözüm olan sonsuz sayıda fonksiyonun oluşturduğu bir $\{\phi_n(x)\}$, $(n = 1, 2, 3, ...)$ fonksiyonlar ailesidir.

Görülüyor ki, bir Sturm-Liouville probleminin "sıfır" çözümünden farklı başka bir çözümünün bulunup bulunmaması, doğrudan doğruya λ 'nın aldığı değerlere bağlıdır. Bu nedenle, "sıfır" çözümünden farklı çözüm veren λ değerlerine, Sturm-Liouville probleminin **karakteristik değerleri** veya "eigen" değerleri ve bu değerlerin kullanılması ile bulunan çözümlere de **karakteristik fonksiyonlar** denir.

Bu tanımlamaya göre, örnek problem (4) 'de,

$$\lambda_n = n^2, \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{21}$$

sayıları, verilen Sturm-Liouville probleminin karakteristik sayılarıdır. λ_n değerlerinin herbiri için bulunan,

$$\varnothing_n(x) = c_n \sin nx, \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{22}$$

fonksiyonları da adı geçen problemin karakteristik fonksiyonları olur.

Örnek 5. $y''+\lambda y=0, \quad y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ (23)

sınır-değer problemini çözünüz.

(I) $\lambda=0$ Bu durumda, diferansiyel denklem,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

şeklini alır ve denklemin genel çözümü,

$$y = cx + c_0$$

olur. Sınır-şartları uygulanırsa,

$$y(0) = 0 + c_0 = 0$$

ve

$$y(\pi/2) = c\,\pi/2 + c_0 = 0$$

yazılır. Buradan $c_0 = 0$ ve $c = 0$ elde edilir. Bu durumda, tek çözüm "sıfır" çözümüdür.

(ii) $\lambda < 0$. Önceden olduğu gibi $\sqrt{-\lambda} = \alpha$ ile gösterilirse, genel çözüm,

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

olur. Sınır-şartları uygulanırsa,

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$

ve

$$y(\pi/2) = c_1 e^{\alpha\,\pi/2} + c_2 e^{-\alpha\,\pi/2} = 0$$

elde edilir. Biliyoruz ki, sıfır çözümünden farklı bir çözüm elde edebilmek için,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\alpha\pi/2} & e^{-\alpha\pi/2} \end{vmatrix}$$

determinantının "sıfır" a eşit olması gerekir. Halbuki, burada $\Delta \neq 0$ olduğundan, bu durumda da tek çözüm "sıfır" çözümüdür.

(iii) $\lambda > 0$. O zaman genel çözüm,

$$y = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\,x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\,x$$

olur. Sınır-şartları uygulanırsa,

$$y(\pi/2) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi/2 + 0 = 0$$

elde edilir. Sıfır çözümünden farklı bir çözüm için,

$$\sqrt{\lambda}\,\pi/2 = n\pi \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olmalıdır. Bu bağıntı bize karakteristik değerler için,

$$\lambda_n = 4n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

veya

$$\lambda = 4, 8, 12, \ldots$$

değerlerini verir. Buna bağlı olarak, (23) numaralı sınır-değer probleminin çözümü olan karakteristik fonksiyonlar

$$\varnothing_n(x) = c_n \sin(2nx)$$

bulunur.

Örnek 6. $$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \lambda\frac{y}{x} = 0$$

$$y'(1) = 0, \quad y'(e^{2\pi}) = 0 \tag{24}$$

Sturm-Liouville probleminin karakteristik değerlerini ve karakteristik fonksiyonlarını bulunuz.

(i) $\lambda = 0$. O zaman diferansiyel denklem,

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] = 0$$

olur. Bu denklemin genel çözümü,

$$x\frac{dy}{dx} = c_0$$

$$dy = c_0\frac{dx}{x}$$

$$y = c_0 \ln x + c \tag{25}$$

elde edilir. Sınır-şartlarını uygulamadan önce y'nin birinci türevi,

$$y' = c_0\frac{1}{x}$$

bulunur. Sınır şartları uygulanırsa,

$$y'(1) = c_0\frac{1}{1} = 0$$

ve

$$y'(e^{2\pi}) = c_0 \frac{1}{e^{2\pi}} = 0$$

olur. Görülüyor ki $c_0 = 0$'dır. Bu değer, (25) numaralı genel çözüm 'de yerine konursa,

$$y = c_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{26}$$

elde edilir. Burada c_n sıfır 'dan farklı herhangi bir keyfi sabit sayıdır. Öyle ise, $\lambda = 0$ karakteristik değerine karşılık olarak, sıfır çözümünden farklı olan $y = c_n$ fonksiyonları karakteristik fonksiyonlardır.

(ii) $\lambda > 0$. Bu durumda $x = e^t$ veya $t = \ln x$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

ve genel çözüm olarak

$$y = c_1 \sin \sqrt{\lambda}\, t + c_2 \cos \sqrt{\lambda}\, t$$

veya

$$y = c_1 \sin (\sqrt{\lambda} \ln x) + c_2 \cos (\sqrt{\lambda} \ln x) \tag{27}$$

elde edilir. Denk. 27 'nin birinci türevi alınırsa,

$$y' = c_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{x} \cos \left(\sqrt{\lambda} \ln x\right) - c_2 \frac{\sqrt{\lambda}}{x} \sin \left(\sqrt{\lambda} \ln x\right)$$

bulunur. Burada, sınır şartları uygulanırsa,

$$y'(1) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos (\sqrt{\lambda} \ln 1) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin (\sqrt{\lambda} \ln 1) = 0$$

ve buradan $c_1 \sqrt{\lambda} = 0$, veya $c_1 = 0$ elde edilir.

İkinci sınır-şartının uygulanmasından,

$$y'\left(e^{2\pi}\right) = c_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{e^{2\pi}} \cos \left(\sqrt{\lambda} \ln e^{2\pi}\right) - c_2 \frac{\sqrt{\lambda}}{e^{2\pi}} \sin \left(\sqrt{\lambda} \ln e^{2\pi}\right) = 0$$

veya

$$c_2 \sqrt{\lambda}\, e^{-2\pi} \sin \left(2\pi \sqrt{\lambda}\right) = 0$$

bulunur. Sıfır çözümünden farklı bir çözümün gerçekleşmesi için,

$$\sin (2\pi \sqrt{\lambda}) = 0, \quad \text{veya}$$

$$2\pi \sqrt{\lambda} = n\pi, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olmalıdır. Buradan,

$$\lambda_n = \frac{n^2}{4}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ve buna bağlı olarak karakteristik fonksiyonlar,

$$\varnothing_n(x) = c_n \cos\left(\frac{n}{2} \ln x\right)$$

elde edilir.

Örnek 7.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{28}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(\pi) = 0$$

Sturm-Liouville problemini çözünüz.

(i) $\lambda = 0$ karakteristik değeri yalnız $y = 0$ çözümünü verir.

(ii) $\lambda < 0$.

$$y = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$

bulunur.

$$y' = c_1\sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2\sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$y'(\pi) = c_1\sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - c_2\sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0$$

olur. Buradan

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0$$

yazılır. Katsayılar determinantı,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & -e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} \neq 0$$

olduğundan, bu durumda tek çözüm "sıfır" çözümüdür.

(iii) $\lambda > 0$

$$y = c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$$

$$y' = c_1\sqrt{\lambda}\, \cos\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) - c_2\, \sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$$

sınır şartları uygulanırsa,

$$y(0) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = 0$$

$$y'(\pi) = c_1\, \sqrt{\lambda} \cos\left(\sqrt{\lambda}\, \pi\right) = 0$$

yazılır. Sonuç olarak,

$$c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, \pi\right) = 0$$

bulunur. Sıfır çözümünden farklı bir çözüm elde etmek için,

$$\sqrt{\lambda}\, \pi = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

olmalıdır. Buradan, (28) numaralı sınır-değer probleminin karakteristik değerleri,

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{2n + 1}{2}$$

ve karakteristik fonksiyonları

$$\varnothing_n(x) = c_n \sin\left(\frac{2n + 1}{2}\, x\right), \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

bulunur.

Örnek 8.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \tag{29}$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0$$

problemini çözünüz.

$\lambda = 0$ ve $\lambda < 0$ için problemin tek çözümü sıfır çözümüdür.

$\lambda > 0$. Bu durumda,

$$y = c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$$

$$y' = c_1\, \sqrt{\lambda} \cos\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) - c_2\, \sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$$

$$y(0) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = 0$$

Buradan, $c_2 = 0$ bulunur. İkinci sınır-değer şartından,

$$y(\pi) - y'(\pi) = c_1 \left[\sin\left(\sqrt{\lambda}\,\pi\right) - \sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\,\pi\right) \right] = 0$$

yazılır. Buna göre,

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\,\pi\right) - \sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\,\pi\right) = 0$$

veya

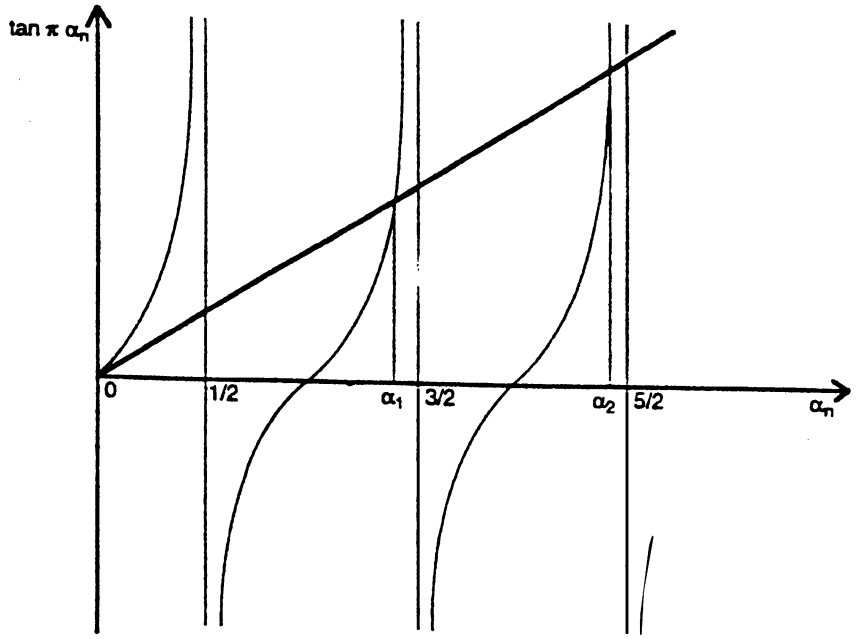
$$\sqrt{\lambda} = \tan\left(\sqrt{\lambda}\,\pi\right) \tag{30}$$

elde edilir. Bu denklemin kökleri olan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ değerleri, (29) numaralı Sturm-Liouville diferansiyel denkleminin karakteristik değerleridir.

Burada, $\sqrt{\lambda} = \alpha$ ile gösterilirse, (30) denklemi

$$\alpha = \tan \pi\alpha$$

şeklini alır. Bu denklemi sağlayan α_n değerleri ise, Şekil 1 'de görüldüğü üzere,



Şekil 1

$y = \alpha x$ doğrusu ile $y = \tan \pi \alpha$ eğrisinin kesiştiği noktaların α değerlerinden başka birşey değildir. Böylece α_n ve dolayısıyla λ_n değerleri bulunmuş olur. Sonuç olarak, diferansiyel denklemin çözümü,

$$\varnothing_n(x) = c_n \sin \sqrt{\lambda_n}\, x, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

elde edilir.

Örnek 9.
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \tag{31}$$
$$y(0) = 0, \qquad y(L) = 0$$

problemini çözünüz.

(i) $\lambda = 0$ için tek çözüm "sıfır" çözümüdür.

(ii) $\lambda < 0$ için,

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$
$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$
$$y(L) = c_1 e^{\alpha L} + c_2 e^{-\alpha L} = 0$$

katsayılar determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\alpha L} & e^{-\alpha L} \end{vmatrix} \neq 0$$

olduğundan, $\lambda < 0$ için, Denk. 31 'in tek çözümü "sıfır" çözümüdür.

(iii) $\lambda > 0$ için,

$$y = c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$$
$$y(0) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = 0, \quad c_2 = 0$$
$$y(L) = c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\, L\right) = 0, \qquad \sin\left(\sqrt{\lambda}\, L\right) = 0$$
$$\sqrt{\lambda}\, L = n\pi, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olur. Buna göre, karakteristik kökler,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

ve karakteristik fonksiyonlar,

$$\varnothing_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda Sturm-Liouville problemlerinin herbirinde karakteristik değerleri ve karakteristik fonksiyonları bulunuz.

(a) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

(b) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(0) = 0$

(c) $y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

(d) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2L), \quad y'(0) = y'(2L)$

(e) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0$

(f) $\frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) + \frac{\lambda}{x} y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y\left(e^{\pi}\right) = 0$

(g) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(-L) = y(L), \quad y'(-L) = y'(L)$

(h) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0$

2. Aşağıda verilen $\{ \varphi_n(x) \}$ fonksiyonlar ailesini gözönüne alınız.

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}}$$

$$\varphi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\varphi_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Bu fonksiyonların $-L \le x \le L$ aralığında, bir ortonormal fonksiyonlar ailesi oluşturduğunu isbatlayınız.

3. $$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n x, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

fonksiyonlarının, $0 \le x \le \pi$ aralığında $r(x) = 1$ fonksiyonuna göre bir ortonormal fonksiyonlar ailesi oluşturduğunu ispatlayınız.

4. $y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) + y'(1) = 0$

probleminin normalize olmuş karakteristik fonksiyonlarının,

$$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n}\right)^{1/2}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, x\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olduğunu gösteriniz.

5. $y'' + \lambda y = 0, \qquad y(-L) - y(L) = 0, \qquad y'(-L) + y'(L) = 0$

probleminin bir Sturn-Liouville problemi olmadığını gösteriniz ve problemi çözünüz.

6. 1, cos x, sin x, cos 2x, sin 2x, ..., cosnx, sinnx, ... fonksiyonlarının, 2π uzunluğunda herhangi bir aralıkta ortogonal olduklarını gösteriniz.

7. $1\,,\ \cos\frac{\pi x}{L}\,,\ \sin\frac{\pi x}{L}\,,\ \ldots\,,\ \cos\frac{n\pi x}{L}\,,\ \sin\frac{n\pi x}{L}\,,\ \ldots$

fonksiyonlarının 2L uzunluğunda herhangi bir aralıkta ortogonal olduklarını gösteriniz.

8. 1, cosx, cos2x, ..., cosnx, ...

sisteminin, $[0, \pi]$ aralığında ortogonal olduğunu gösteriniz.

9. sinx, sin2x, ..., sinnx, ..

sisteminin $[0, \pi]$ aralığında ortogonal olduğunu gösteriniz.

10. sinx, sin3x, sin5x, ..., sin (2n + 1)x, ...

sisteminin $[0, \pi/2]$ aralığında ortogonal olduklarını gösteriniz.

11. $1,\ \cos\frac{\pi x}{L}\,,\ \cos\frac{2\pi x}{L}\,,\ \ldots\,,\ \cos\frac{n\pi x}{L}\,,\ \ldots$

sisteminin $[0, L]$ aralığında ortogonal olduğunu gösteriniz.

12. $\sin \frac{\pi x}{L}$, $\sin \frac{2\pi x}{L}$, ..., $\sin \frac{n\pi x}{L}$, ...

sisteminin $[0, L]$ aralığında ortogonal olduğunu gösteriniz.

13. $\{\sin (2n + 1)x\}$, $n = 0, 1, 2, ...$

fonksiyonlarının, $[0, \pi/2]$ aralığında bir ortonormal sistem oluşturmaları için fonksiyonların herbiri hangi katsayı ile çarpılmalıdır.

14. Bir ortogonal sisteme ait fonksiyonların kendi aralarında lineer bağımsız olduklarını gösteriniz.

15. $1, x, x^2, x^3, ...$, fonksiyonlarının lineer bağımsız olduklarını gösteriniz.

9-3 ORTOĞONAL FONKSİYONLAR

Üç boyutlu uzayda biribiriyle kesişen bir $F = (F_1, F_2, F_3)$ kuvvet vektörü ile bir $r = (r_1, r_2, r_3)$ yerdeğiştirme vektörünü gözönüne alalım. Burada F_k ve r_k $(k = 1, 2, 3)$, adı geçen vektörlerin eksenler doğrultusundaki bileşenleridir. Bu iki vektörün skalar çarpımının,

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \langle F, r \rangle = \sum_{k=1}^{3} F_k r_k \tag{32}$$

şeklinde tarif edildiğini biliyoruz. Burada, F ve r, adı geçen vektörlerin büyüklükleri olup,

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} \quad \text{ve} \quad r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$$

şeklinde tarif edilirler.

İki vektörün skalar çarpımı, vektörlerin herbirinin büyüklüğüne bağlı olduğu gibi, vektörler arasındaki θ açısının değerine de bağlıdır. $\theta = 0$ olduğu zaman skalar çarpımın değeri maksimum ve $\theta = 90°$ olduğu zaman skalar çarpımın değeri "sıfır" olur.

Bu defa, herbiri a x b aralığında sürekli iki $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu fonksiyonların çarpımı ise, yukarıda olduğu gibi,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \tag{33}$$

şeklinde tarif edilir. Burada f(x) ve g(x) yer değiştirirse çarpımın değeri değişmez.

Bir vektörün büyüklüğü yukarıda,

$$\left|\vec{r}\right| = r = \sqrt{\langle r, r\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} r_k^2}$$

şeklinde tarif edilmiştir. Aynı şekilde bir fonksiyonun "norm" u da,

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

şeklinde tarif edilir. Eğer, $\|f\| = 1$ ise, $f(x)$ fonksiyonu "normalize" olmuş bir fonksiyondur ve **birim fonksiyon** adını alır.

Vektörlerin biribirine dik olmaları olayı aynen fonksiyonlar için de geçerlidir. Buna göre, bir $a \le x \le b$ aralığında sürekli olan $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için eğer

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0 \qquad (34)$$

ise, bu fonksiyonlar adı geçen aralıkta biribirine "dik" dir veya **ortogonal** 'dir denir. Örnek olarak, $2x$ ve $4x$ fonksiyonlarının $0 \le x \le \pi$ aralığında ortogonal olup olmadıklarına bakalım. Burada,

$$\int_0^{\pi} (\sin 2x)\,(\sin 4x)\,dx = \left[\frac{\sin^3 2x}{3}\right]_0^{\pi} = 0 \qquad (35)$$

olduğundan, bu fonksiyonlar adı geçen aralıkta biribirine dik iki fonksiyondur.

Genel olarak, herhangi bir $a \le x \le b$ aralığında sürekli iki $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonunun, bu aralıkta, **ağırlık fonksiyonu** adı verilen bir $r(x)$ fonksiyonuna göre ortogonal olup olmadığından sözedilir. O zaman, (34) denklemi yeniden yazılırsa,

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,r(x)\,dx = 0 \qquad (36)$$

şeklini alır. Bu tarife göre, (35) numaralı denklemle ifade edilen örnekde $r(x) = 1$ olur.

Herhangi bir $a \le x \le b$ aralığında tarif edilmiş sonsuz sayıda sürekli fonksiyondan oluşan $\{\varnothing_n(x)\}$ veya $\{\varnothing_1(x),\ \varnothing_2(x),\ \ldots\}$ fonksiyonlar ailesini gözönüne alalım. Eğer, bu aileden herhangi iki fonksiyon, $[a, b]$ aralığında bir $r(x)$ fonksiyonuna göre ortogonal ise, başka bir deyişle,

$$\langle \varnothing_m, \varnothing_n\rangle = \int_a^b \varnothing_m(x)\,\varnothing_n(x)\,r(x)\,dx = 0, \qquad m \ne n \qquad (37)$$

ise, $\{ \varnothing_n(x) \}$ ailesine, $a \le x \le b$ aralığında $r(x)$ fonksiyonuna göre **"ortogonal set"** veya **ortogonal sistem** adı verilir. Burada ispatını yapmaksızın, hemen belirtelim ki, herhangi bir Sturm-Liouville probleminin çözümü olan karakteristik fonksiyonlardan oluşan bir $\{ \varnothing_n(x) \}$ ailesi bir ortogonal sistemdir.

Bir ortogonal ailenin herhangi bir fonksiyonu $\varnothing_n(x)$ ve bu fonksiyonun bir sabit sayı ile çarpımından elde edilen bir yeni fonksiyon da $\varphi_n(x)$ olsun. $r(x)$ bir ağırlık fonksiyonunu temsil etmek üzere, eğer,

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\, r(x)\, dx = 1 \tag{38}$$

ise, $\varphi_n(x)$ fonksiyonuna, $a \le x \le b$ aralığında $r(x)$ fonksiyonuna göre $\varnothing_n(x)$'in **normalize fonksiyonu** adı verilir. Örneğin, $\varphi_n(x) = \sqrt{2/\pi}\, \sin x$ olsun,

$$\int_0^{\pi} \left(\sqrt{2/\pi}\, \sin x \right)^2 [1]\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx$$

$$= 1$$

olduğundan, $\varphi_n(x) = \sqrt{2/\pi}\, \sin x$ fonksiyonu, $0 \le x \le \pi$ aralığında, $r(x) = 1$ fonksiyonuna göre normalize bir fonksiyondur.

$\{ \varphi_n(x) \}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, fonksiyonlarının herbiri, bir $a \le x \le b$ aralığında, $r(x)$ fonksiyonuna göre normalize olmuş ortogonal fonksiyonlar ise, o zaman, $\{ \varphi_n(x) \}$ ailesine **ortonormal set** denir. Bir ortonormal ailenin fonksiyonları için,

$$\int_a^b \varphi_m(x)\, \varphi_n(x)\, r(x)\, dx = \delta_{mn} \tag{39}$$

yazılır. Burada δ_{mn}'ye "kronecker delta" adı verilir. m ve n'nin değerlerine bağlı olarak,

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

olur.

Herhangi bir Sturm-Liouville probleminin bir λ_n karakteristik değerine karşılık olan $\varnothing_n(x)$ karakteristik fonksiyonunu gözönüne alalım. k_n, sıfır'dan farklı bir keyfi sayı olmak üzere, $k_n \varnothing_n(x)$ fonksiyonunun da aynı λ_n değerine karşılık bir karakte-

ristik fonksiyon olduğu açıktır. Bu durumda, $\varnothing_1(x)$, $\varnothing_2(x)$, $\varnothing_3(x)$, ..., karakteristik fonksiyonları yerine $k_1\varnothing_1(x)$, $k_2\varnothing_2(x)$, $k_3\varnothing_3(x)$, ... gibi yeni bir karakteristik fonksiyonlar ailesi elde edilir ve bu fonksiyonlar da, $a \le x \le b$ aralığında aynı $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir set oluşturur. Burada, k_1, k_2, k_3, ... sayıları o şekilde bulunabilirler ki, $k_n\varnothing_n(x)$ fonksiyonlarının herbiri, $a \le x \le b$ aralığında $r(x)$ fonksiyonuna göre normalize olmuş olsun. O zaman, $\{k_n \varnothing_n(x)\}$ veya sadece $\{\varphi_n(x)\}$ ile göstereceğimiz yeni ortogonal fonksiyonlar sistemi, yukarıda da belirtmiş olduğumuz gibi, "ortonormal set" adını alır.

Herhangi bir $\varnothing_n(x)$ fonksiyonunun $a \le x \le b$ aralığında bir $r(x)$ fonksiyonuna göre ortogonal olduğu ve sıfır 'dan farklı bir değeri bulunduğu gözönüne alınırsa,

$$\int_a^b \varnothing^2{}_n(x)\, r(x)\, dx = K_n > 0\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{40}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\int_a^b \left[\frac{1}{\sqrt{K_n}}\varnothing_n(x)\right]^2 r(x)\, dx = 1$$

olur. Bu demektir ki, Denk. 38 uyarınca,

$$\frac{1}{\sqrt{K_n}}\varnothing_n(x) = \varphi_n(x)$$

dir. Öyle ise,

$$\frac{1}{\sqrt{K_1}}\varnothing_1(x)\,,\ \frac{1}{\sqrt{K_2}}\varnothing_2(x)\,,\ \frac{1}{\sqrt{K_3}}\varnothing_3(x)\,,\ \ldots$$

bir otonormal set oluşturur. Buradan,

$$k_n = \frac{1}{\sqrt{K_n}}\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{41}$$

elde edilir. Böylece, bir karakteristik fonksiyonunun normalize olabilmesi için hangi sayı ile çarpılması gerektiği kolayca bulunmuş olur.

Örnek 1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0$$

sınır-değer probleminin $\varnothing_m(x)$ ve $\varnothing_n(x)$ karakteristik fonksiyonlarının, $0 \le x \le \pi$ aralığında, $r(x) = 1$ fonksiyonuna göre "ortogonal" olduklarını gösteriniz. $\varphi_n(x) = k_n\varnothing_n(x)$ normalize karakteristik fonksiyonunu bulunuz.

Burada verilen sınır-değer problemi, yukarıda örnek problem 5 'de incelenmiş ve karakteristik fonksiyonların,

$$\varnothing_n(x) = c_n \sin(2nx), \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

şeklinde olduğu görülmüştür. $m \neq n$ olmak üzere, bu fonksiyonlar ve problemle birlikte verilen sınır şartları, Denk. 37 'de yerlerine konursa,

$$\int_0^{\pi} \varnothing_m(x)\,\varnothing_n(x)\,[1]\,dx = \int_a^b c_m c_n \sin(2mx)\sin(2nx)\,dx$$

$$= c_m c_n \int_0^{\pi} \sin 2mx \sin(2nx)\,dx$$

$$= c_m c_n \left[\frac{\sin 2(m-n)x}{4(m-n)} - \frac{\sin 2(m+n)x}{4(m+n)}\right]_0^{\pi}$$

elde edilir. Burada, m ve n biribirinden farklı iki tamsayı olduğuna göre integralin değeri, "sıfır" dır. Bunun anlamı, $\varnothing_m(x)$ ve $\varnothing_n(x)$ fonksiyonları, $0 \le x \le \pi$ aralığında, $r(x) = 1$ fonksiyonuna göre ortogonal 'dır.

İkinci olarak, $m = n$ halini gözönüne alalım ve bu durumda integralin değerini hesaplayalım.

$$\lim_{m\to n}\left[\frac{\sin 2(m-n)x}{4(m-n)}\right]_0^{\pi} = \lim_{m\to n}\left[\frac{x}{2}\,\frac{\sin 2(m-n)x}{2(m-n)}\right]_0^{\pi}$$

$$= \left[\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

ve

$$\lim_{m\to n}\left[\frac{\sin 2(m+n)x}{4(m+n)}\right]_0^{\pi} = \left[\frac{\sin(4nx)}{8n}\right]_0^{\pi} = 0$$

olduğundan, $m = n$ için

$$\int_0^{\pi} \varnothing_m(x)\,\varnothing_n(x)\,[1]\,dx = \int_0^{\pi} \varnothing_n^2(x)\,[1]\,dx$$

$$= K_n = c_n^2 \frac{\pi}{2} \tag{42}$$

elde edilir. (41) ve (42) denklemleri birlikte gözönüne alınırsa,

$$k_n = \frac{1}{\sqrt{K_n}} = \frac{1}{c_n\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{c_n}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{43}$$

bulunur. Böylece,

$$\varphi_n(x) = k_n \varnothing_n(x) = \frac{1}{c_n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, c_n \sin(2nx)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sin(2nx) \tag{44}$$

elde edilir.

Örnek 2. $\varnothing_n = c_n \sin \dfrac{n\pi}{L}\, x, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

karakteristik fonksiyonlarının $0 \le x \le L$ aralığında, $r(x) = 1$ fonksiyonuna göre ortogonal olduğunu gösteriniz. Ayrıca, $\varphi_n(x) = k_n \varnothing_n(x)$ normalize fonksiyonları bulunuz.

Önce aşağıdaki integralleri hatırlayalım. $m \neq n$ için,

$$\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$$

ve

$$\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$\int_0^L c_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cdot c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)[1]\,dx$$

$$= c_m c_n \left(\left. \frac{\sin(m-n)\frac{\pi}{L}x}{2(m-n)\frac{\pi}{L}} \right|_0^L - \left. \frac{\sin(m+n)\frac{\pi}{L}x}{2(m+n)\frac{\pi}{L}} \right|_0^L \right) = 0$$

olduğundan, $\varnothing_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi}{L} x$ fonksiyonlarının, $0 \le x \le L$ aralığında $r(x) = 1$ fonksiyonuna göre ortogonal oldukları isbatlanmış olur.

$$\int_0^L \left(c_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)^2 [1]\, dx = K_n$$

$$= \frac{1}{2} c_n^2 \int_0^L \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{L} x \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} c_n^2 \left(x - \frac{\sin \frac{2n\pi}{L} x}{\frac{2n\pi}{L}} \right) \Bigg|_0^L = c_n^2 \frac{L}{2}$$

veya

$$K_n = c_n^2 \frac{L}{2}$$

bulunur. Denk. 41 uyarınca,

$$k_n = \frac{1}{\sqrt{K_N}} = \frac{1}{c_n \sqrt{\frac{L}{2}}}$$

olur. Buradan

$$\varphi_n = k_n \varnothing_n = \frac{1}{c_n \sqrt{\frac{L}{2}}} c_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

veya

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

elde edilir.

Örnek 3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$

Sturm-Liouville probleminin çözümü olan karakteristik fonksiyonların, $0 \le x \le L$ aralığında $r(x) = 1$ fonksiyonuna göre ortogonal bir set oluşturduklarını gösteriniz. Karakteristik fonksiyonları normalize ediniz.

Yukarıda verilen sınır-değer probleminin karakteristik değerleri ve bunlara karşılık olan karakteristik fonksiyonları,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$\varnothing_n(x) = c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) x\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

dır. Burada önemle işaret edelim ki, $\lambda_0 = 0$ bir karakteristik değerdir ve buna bağlı olarak $\varnothing_0(x) = c_0$ değeri de bir karakteristik fonksiyon olur.

$$\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}\right) x \,.\, \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) x \, dx = \left[\frac{\sin(m-n)\frac{\pi}{L}x}{2(m-n)\frac{\pi}{L}} + \frac{\sin(m+n)\frac{\pi}{L}x}{2(m-n)\frac{\pi}{L}} \right]_0^L$$

Burada, $m = n$ için eşitliğin sağ tarafı "sıfır" olduğundan, $0 \le x \le L$ aralığında sabit ve 1 değerine eşit olan ağırlık fonksiyonuna göre, $\{\varnothing_n(x)\}$ ailesinin bir ortogonal set oluşturduğu isbatlanmış olur.

Bu fonksiyonların normalize edilmesine gelince,

$$K_n = \int_0^L \varnothing_n^2(x)\,dx = c_n^2 \int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi}{L}\right) dx = c_n^2 \int_0^L \left(1 - \sin^2\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$= c_n^2\left(L - \frac{L}{2}\right) = c_n^2\frac{L}{2}$$

olduğundan

$$k_n = \frac{1}{\sqrt{K_n}} = \frac{1}{c_n\sqrt{\frac{L}{2}}}$$

bulunur. Buradan,

$$\varphi_n(x) = k_n \varnothing_n(x) = \frac{1}{c_n\sqrt{\frac{L}{2}}} \,.\, c_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

veya

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\frac{n\pi}{L}x$$

elde edilir.

Örnek 4. $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

sonsuz sayıda polinom ve $P_n(1) = 1$ olsun. $-1 \le x \le 1$ aralığında, $r(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre, $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ polinomları bir ortogonal set oluştursun. Bu polinomları bulunuz.

Burada ilk birkaç polinom,

$$P_0(x) = a_0$$

$$P_1(x) = b_0x + b_1$$

$$P_2(x) = c_0x^2 + c_1x + c_2$$

$$P_3(x) = d_0x^3 + d_1x^2 + d_2x + d_3$$

$$\vdots$$

şeklinde yazılabilir. $P_n(1) = 1$ olmasından ve $\{P_n(x)\}$'in bi ortogonal set oluşturmuş olmasından yararlanarak katsayılar aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$P_0(1) = 1 = a_0$$

$$P_1(1) = 1 = b_0 + b_1$$

$$\int_{-1}^{+1} P_0(x)\, P_1(x)\, [1]\, dx = \int_{-1}^{+1} (b_0x + b_1)\, dx = \left[\frac{b_0}{2}x^2 + b_1x\right]_{-1}^{+1}$$

$$= \frac{b_0}{2}(1 - 1) + b_1(1 + 1) = 2b_1 = 0$$

yazılır. Buradan, $b_1 = 0$ bulunur. $b_0 + b_1 = 1$ olduğuna göre, $b_0 = 1$ olur. Böylece,

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

bulunur. İşlemlere aynı şekilde devam edersek,

$$\int_{-1}^{+1} P_1(x)\, P_2(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} x\left(c_0x^2 + c_1x + c_2\right) dx = 0$$

yazılır. Buradan, $c_0 = 3/2$, $c_1 = 0$ ve $c_2 = -1/2$ bulunur.

Bu katsayılar yerlerine konursa,

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

elde edilir.

$$P_3(x) = d_0x^3 + d_1x^2 + d_2x + d_3$$

$$P_3(1) = 1 = d_0 + d_1 + d_2 + d_3$$

$$\int_{-1}^{+1} P_0(x)\, P_3(x)\, dx = 0 = \frac{2}{3} d_1 + 2d_3$$

$$\int_{-1}^{+1} P_1(x)\, P_3(x)\, dx = 0 = \frac{2}{5} d_0 + \frac{2}{3} d_2$$

$$\int_{-1}^{+1} P_2(x)\, P_3(x)\, dx = 0 = \left(\frac{6}{10} - \frac{1}{3}\right) d_1 + (1 - 1)d_3$$

Buradan, $d_0 = 5/2$, $d_1 = 0$, $d_2 = -3/2$ ve $d_3 = 0$ bulunur.

Sonuç olarak,

$$P_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$

elde edilir. Bu işlemlere aynı şekilde devam edilerek diğer polinomlar bulunabilir.

Burada önemle belirtelim ki, yukarıda bulduğumuz $\{P_n(x)\}$ polinomları, önceden tarif edilen Legendre polinomlarından başka birşey değildir.

9-4 BİR FONKSİYONUN ORTONORMAL FONKSİYONLAR CİNSİNDEN SERİYE AÇILIMI

Üç boyutlu uzayda bir vektörün, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ şeklinde veya birim vektörler kullanılarak,

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{u}_1 + v_2 \mathbf{u}_2 + v_3 \mathbf{u}_3 = \sum_{n=1}^{3} v_n \mathbf{u}_n$$

şeklinde yazıldığını biliyoruz. Burada, v_1, v_2, ve v_3 skalar büyüklükler olup $\mathbf{v}$ 'nin eksenler doğrultusundaki bileşenlerini; $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ve $\mathbf{u}_3$ ise birim vektörleri göstermektedir.

Vektörler için yukarıda söylediklerimize benzer şeyler, fonksiyonlar için de aynen geçerlidir. Bunun için önce, herbiri $a \le x \le b$ aralığında sürekli olan $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots\}$ ortonormal fonksiyonlar ailesini gözönüne alalım. Bir ortonormal fonksiyona birim fonksiyon gözü ile bakılabildiğinden, bir $a \le x \le b$ aralığında sürekli herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{46}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $c_1, c_2, c_3, \ldots$ katsayıları, bulunması gereken sabit sayılardır. k herhangi bir sayı olmak üzere, Denk. 46 'nın heriki tarafı da $\varphi_k(x)$ ile çarpılırsa,

$$f(x)\,\varphi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\varphi_n(x)\,\varphi_k(x)$$

olur. Yukarıda adı geçen c_n katsayılarının hesaplanabilmesi için eşitliğin sağ tarafındaki terimlerin herbirinin, $a \le x \le b$ aralığında integrallerin alınabilmesi gerekmektedir. Buna göre,

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\varphi_n(x)\,\varphi_k(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b c_n\,\varphi_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx \qquad (47)$$

elde edilir.

Denk. 39 'dan biliyoruz ki $r(x) = 1$ için,

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases}$$

olduğundan, (47) denkleminin sağ tarafı, k 'ıncı terimin dışında "sıfır" ve $n = k$ için c_k 'ya eşit olur. Bu durumda Denk. 47 tekrar yazılırsa,

$$c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (48)$$

bulunur.

(48) denklemi ile ifade edilen katsayılara **Fourier katsayıları** ve (46) denkleminin sağ tarafında görülen seriye de, eğer seri $a \le x \le b$ aralığında yakınsak ise ve bu aralıkta $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşıyorsa, **Fourier serisi** denir. $[a, b]$ aralığındaki her noktada adı geçen serinin $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşması ve Fourier serisi olabilmesi için, $f(x)$ fonksiyonunun ve $\{\varphi_n(x)\}$ fonksiyonlarının bazı şartları sağlaması gerekmektedir. Bu konunun tartışılması amacımız dışında kaldığından burada ele alınmayacaktır.

Örnek 1. $\varphi_n(x) = \frac{2}{\pi} \sin nx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

ortonormal fonksiyonlarını kullanarak, $f(x) = x^2 - 2x$ fonksiyonunun $0 \le x \le \pi$ aralığındaki Fourier açılımını bulunuz.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun ortonormal fonksiyonlar cinsinden Fourier açılımı,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

dır. Burada $\{\varphi_n(x)\}$ fonksiyonları verilmiştir, fakat c_n Fourier katsayılarının hesaplanması gerekmektedir. $r(x) = 1$ için bu katsayılar,

$$c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} x^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx\,dx - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} 2x \sin nx\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\,dx - 2 \int_0^{\pi} x \sin nx\,dx \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\frac{x^2 \cos nx}{n} + \frac{2x \sin nx}{n^2} + \frac{2 \cos nx}{n^3} - \frac{2}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n} x \cos nx \right]_0^{\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\frac{\pi^2}{n} \cos n\pi + \frac{2}{n^3} \cos n\pi + \frac{2\pi}{n} \cos n\pi - \frac{2}{n^3} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\cos n\pi \left(-\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{2\pi}{n} \right) - \frac{2}{n^3} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[(-1)^n \left(-\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{2\pi}{n} \right) - \frac{2}{n^3} \right]$$

bulunur. Böylece, $0 \le x \le \pi$ aralığında, $f(x) = x^2 - 2x$ fonksiyonunun Fourier serisi açılımı,

$$x^2 - 2x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \left(-\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{2\pi}{n} \right) - \frac{2}{n^3} \right] \sin nx$$

elde edilir.

Örnek 2. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun, $0 \le x \le 1$ aralığında $\{\sqrt{2}\sin n\pi x\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ortonormal fonksiyonları cinsinden Fourier sinüs serisi açılımını gösteriniz.

Önce Fourier katsayıları bulunur.

$$c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \sqrt{2} \sin n\pi x \, dx$$

$$= \sqrt{2} \int_0^1 x^2 \sin n\pi x \, dx$$

$$= \sqrt{2} \left[-\frac{x^2 \cos n\pi x}{n\pi} + \frac{2x \sin n\pi x}{(n\pi)^2} + \frac{2 \cos n\pi x}{(n\pi)^3} \right]_0^1$$

$$= \sqrt{2} \left[-\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{2 \cos n\pi}{(n\pi)^3} - \frac{2}{(n\pi)^3} \right]$$

$$= -\sqrt{2} \left[\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^3}(1 - \cos n\pi) \right]$$

Bu değerler (46) denkleminde yerine konursa, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $0 \le x \le 1$ aralığında geçerli olan Fourier sinüs serisi aşağıdaki şekilde bulunmuş olur. Böylece,

$$x^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{2\left[1 - (-1)^n\right]}{(n\pi)^3} \right) \sin n\pi x \qquad (49)$$

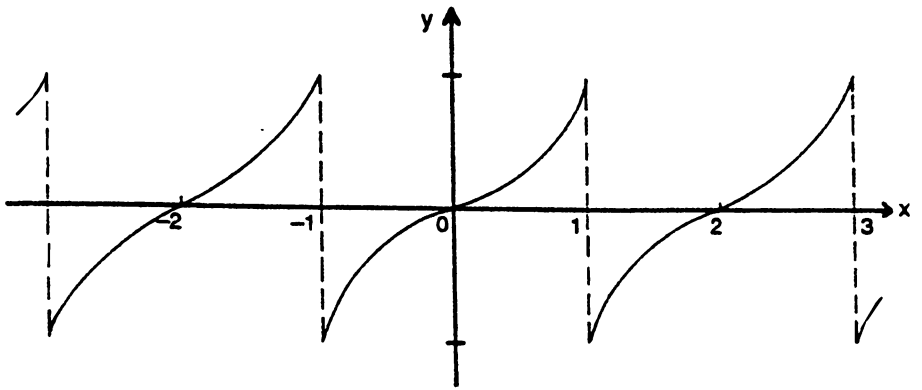
elde edilir.

(49) denkleminin sağ tarafındaki Fourier serisi, aşağıda Şek. 2 de grafiği görülen bir F(x) periodik fonksiyonuna yaklaşır. Bu fonksiyonun periodu 2 'dir ve bu fonksiyon bir tek fonksiyondur.

Şimdi bilinen bazı tanımlamaları burada hatırlatmakta yarar vardır. Örneğin, bir $f(x)$ fonksiyonunda, x yerine $(x + T)$ yazıldığında,

$$f(x) = f(x + T)$$

oluyorsa, bu fonksiyona **periodik fonksiyon** denir. Ayrıca, unutmamak gerekir ki, $f(x) = -f(x)$ şartını sağlıyan ve 0 başlangıç noktasına göre simetrik olan her fonksiyon bir **tek** fonksiyon ve $f(-x) = f(x)$ şartını sağlıyan ve y- eksenine göre simetrik olan her fonksiyon bir **çift** fonksiyondur. Bu durumda yukarıda adı geçen $F(x)$ fonksiyonu, $f(x) = x^2$, $0 \le x \le 1$ tek fonksiyonunun,



Şekil 2

şekilde görülen periodik açılımı olur. Bu demektir ki, Fourier serisi $0 \le x \le 1$ aralığında $f(x) = x^2$ fonksiyonuna yaklaşıyorsa, bu seri aynı zamanda x'in bütün değerleri için $F(x)$ fonksiyonuna yaklaşır.

Örnek 3. $0 < x < L$ aralığında sürekli olan bir $f(x)$ fonksiyonunun,

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < L$$

$$y(0) = y(L) = 0$$

Sturm-Liouville probleminin $\varphi_n(x) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ortonormal karakteristik fonksiyonları cinsinden Fourier açılımını bulunuz.

$0 < x < L$ aralığında tarif edilen bir $f(x)$ fonksiyonunun, verilen ortonormal fonksiyonlar cinsinden Fourier sinüs açılımı,

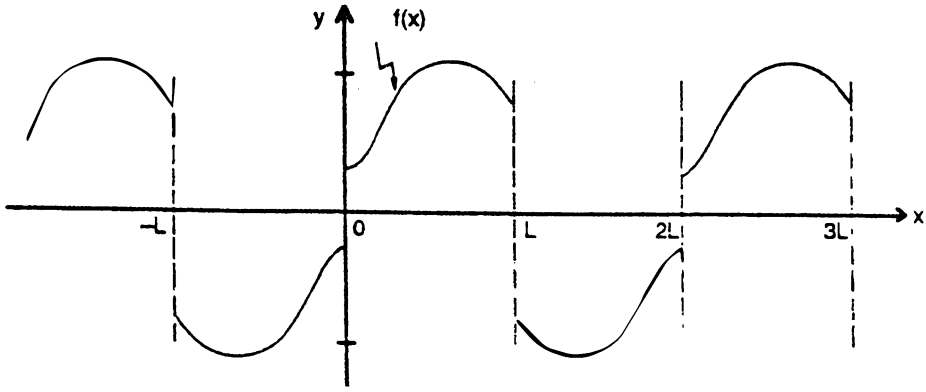
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{50}$$

olur Burada,

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

dır.

Açıkça görülüyor ki, Denk. 50 'nin sağ tarafı periyodu $2L$ olan bir periodik fonksiyondur. $F(x)$ ile göstereceğimiz bu fonksiyon bir tek fonksiyondur. Fourier serisi, $0 < x < L$ aralığında $f(x)$ fonksiyonuna yaklaştığında, aynı seri x 'in her değeri için $F(x)$ fonksiyonuna yaklaşır. $F(x)$ fonksiyonu,



Şekil 3

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ -f(x), & -L < x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tarif edilebilir ve yukarıdaki grafikte gösterilir.

9-5 TRİGONOMETRİK FOURIER SERİLERİ

Bazı şartlar altında bir $f(x)$ fonksiyonunun, Denk. 46 'da görüldüğü şekilde bir $[a, b]$ aralığında Fourier serisine açılımının mümkün olduğunu gördük. Yukarıda verilen örneklerde; $\{\varphi_n(x)\}$ ortonormal fonksiyonları olarak yalnız sinüs fonksiyonlarını gözönüne aldık. Şimdi ise örneğin,

$$\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < L \\ &y'(0) = y'(L) = 0 \end{aligned} \tag{51}$$

Sturm-Liouville probleminin karakteristik fonksiyonlarını veya

$$\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < L \\ &y(0) = y(2L) \\ &y'(0) = y'(2L) \end{aligned} \tag{52}$$

probleminin karakteristik fonksiyonlarını gözönüne alalım ve $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında bu karakteristik fonksiyonların ortonormal fonksiyonları cinsinden

Fourier açılımını bulmaya çalışalım. Denk. 51 'in karakteristik değerleri ve karakteristik fonksiyonları,

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \qquad \phi_n(x) = c_n \cos \frac{n \pi}{L} x, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{53}$$

dır. Burada $\lambda_0 = 0$ bir karakteristik değer ve buna karşılık olan karakteristik fonksiyon $\phi_0(x) = c_0$ 'dır. $c_0 = 1$ alınırsa $\phi_0(x) = 1$ olur.

Aynı şekilde, Denk. 52 'nin karakteristik değerleri ve karakteristik fonksiyonlarının,

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\phi_n(x) = \alpha_n \cos \frac{n \pi}{L} x + \beta_n \sin \frac{n \pi}{L} x \tag{54}$$

olduğunu ve (53), (54) denklemi ile ifade edilen bu ortogonal karakteristik fonksiyonların herbiri için, verilen aralıklarda normalize olmuş ortonormal fonksiyonlar elde edilebildiğini biliyoruz. Bu demektir ki, bütün bu ortonormal fonksiyonlar (46) denkleminde kullanıldığında, bazı şartlar altında, verilen bir $[a, b]$ aralığında tarif edilmiş sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu Fourier serisine açılabilir ve bu seri yalnız "sinüs" serisi veya yalnız "kosinüs" serisi olabildiği gibi hem sinüs serisi hem de kosinüs serisinin toplamı ile bir sabit sayının toplamından oluşan genel bir Fourier serisi de olabilir.

Yukarıda değindiğimiz hususların ışığı altında şimdi aşağıda verilen bir $\{\varphi_n(x)\}$ fonksiyonlar ailesini gözönüne alalım.

$$\varphi_1(x) = 1$$

$$\varphi_{2n}(x) = \cos \frac{n \pi}{L} x, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{55}$$

$$\varphi_{2n+1}(x) = \sin \frac{n \pi}{L} x, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Bu fonksiyonların ortogonal fonksiyonlar olduğunu ve bir $-L \le x \le L$ aralığında bu fonksiyonlara karşılık olan **ortonormal** fonksiyonların,

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}}$$

$$\phi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi}{L} x, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{56}$$

$$\phi_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olduğunu kolayca isbatlayabiliriz.

Genel olarak ifade etmek istersek, yukarıda değindiğimiz şekilde bir $f(x)$ fonksiyonu gözönüne alındığında, eğer (56) fonksiyonlarının her biri ile f(x) 'in çarpımı olan $f(x)\,\phi_n(x)$ fonksiyonlarının $-L \le x \le L$ aralığında integrali alınabiliyorsa, o zaman bu aralıkta $f(x)$ fonksiyonu, (56) denklem sistemi ile ifade edilen $\{\phi_n(x)\}$ ortonormal fonksiyonlar cinsinden Fourier serisine açılabilir ve ağırlık fonksiyonu $r(x) = 1$ için Fourier katsayıları,

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$c_{2n} = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{57}$$

$$c_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olur. Bu durumda, (46) denklemi,

$$f(x) = c_1 \phi_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{2n} \phi_{2n}(x) + c_{2n+1} \phi_{2n+1}(x) \right] \tag{58}$$

şeklini alır. Fourier katsayıları Denk. 58 'de yerlerine konursa,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\right] \cos\frac{n\pi x}{L} + \left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right] \sin\frac{n\pi x}{L} \right\}$$

elde edilir. Burada köşeli parantez içindeki ifadeler sıra ile,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad (59)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

şeklinde gösterilirse, $-L \le x \le L$ aralığında, f(x) fonksiyonunun **Trigonometrik Fourier Serisi,**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (60)$$

elde edilir. Burada period *2L* 'dir ve (59) denklemleri ile ifade edilen katsayılar, Denk. 60 'ın Fourier katsayılarıdır. Burada a_0 sabit değeri a_n 'nin $n = 0$ değerinden başka birşey değildir.

f(x) fonksiyonunun periodu 2π ise, (60) denklemi,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

şeklini alır ve o zaman Fourier katsayıları,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

ve

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olur.

Bir *f(x)* fonksiyonunun trigonometrik Fourier serisine açılımını bulma işleminde, tek fonksiyon ve çift fonksiyon kavramları büyük önem taşır. Unutmamalıdır ki, bir çift fonksiyonun kendisi ile veya başka bir çift fonksiyon ile çarpımı, bir çift

fonksiyon verir. Aynı şekilde, bir tek fonksiyonun kendisi ile veya başka bir tek fonksiyon ile çarpımı da gene bir çift fonksiyon verir. Bir çift fonksiyon ile bir tek fonksiyonun çarpımı ise bir tek fonksiyon verir.

Şimdi kabul edelim ki $f(x)$ fonksiyonu bir çift fonksiyondur. Kosinüs fonksiyonu da bir çift fonksiyon olduğundan, $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$, $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ bir çift fonksiyon olur. O zaman, (59) denklem sistemi ile ifade edilen Fourier katsayıları,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \neq 0, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

ve

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx = 0, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olur. Bu demektir ki, $-L \leq x \leq L$ aralığında sürekli bir $f(x)$ çift fonksiyonun genel trigonometrik Fourier serisine açılımı,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{62}$$

olur.

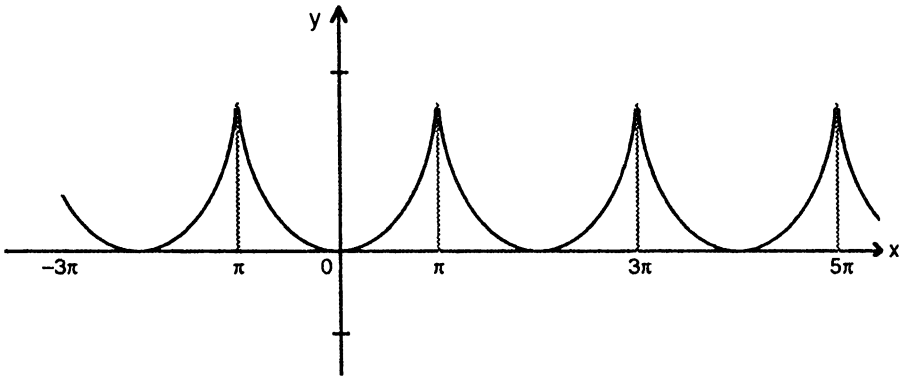
Eğer $f(x)$ bir tek fonksiyon ise, $-L \leq x \leq L$ aralığında bu fonksiyonun trigonometrik Fourier serisine açılımı sadece,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olur. Öyle ise bir $f(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun sürekli olduğu $[a, b]$ aralığı verildiğinde önce fonksiyonun bir tek fonksiyon veya bir çift fonksiyon olup olmadığına bakılır. $f(x)$ fonksiyonu bir tek veya bir çift fonksiyon değilse o zaman fonksiyonun seriye açılımı genel Fourier serisini verecektir.

Örnek 1. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $-\pi \le x \le \pi$ aralığında trigonometrik Fourier serisi açılımını bulunuz.

$f(x) = x^2$ fonksiyonu bir çift fonksiyondur ve bu fonksiyonun periodik açılımını gösteren grafik Şekil 4 'de gösterilmiştir.



Şekil 4

Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

ve

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x \sin nx\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}[x\cos nx]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{4}{n^2}\cos n\pi = (-1)^n\frac{4}{n^2}$$

elde edilir. $f(x)$ fonksiyonu bir çift fonksiyon olduğundan $n = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere $b_n = 0$ dır. Böylece,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

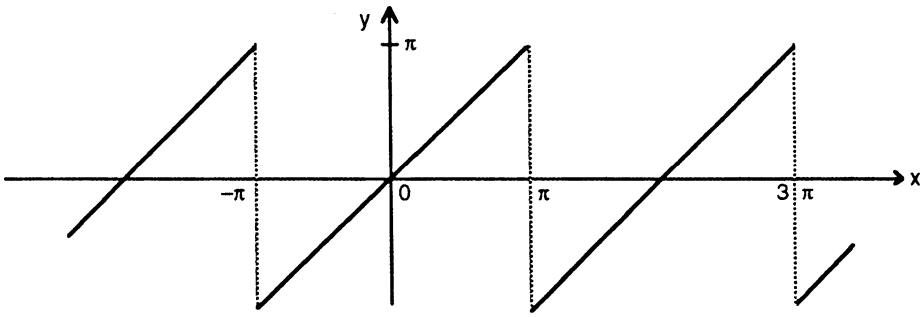
veya

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right) \tag{63}$$

elde edilir. Görülüyor ki, (63) eşitliğinin sağ tarafındaki serinin her teriminin $[-\pi, \pi]$ aralığında integrali alınabilir ve aralığın uç noktalarında ve bu aralıkta x 'in her değeri için serinin alacağı değer $f(x) = x^2$ fonksiyonunun alacağı değere yaklaşır.

Örnek 2. $f(x) = x$ fonksiyonunun, $-\pi < x < \pi$ aralığında Fourier serisi açılımını bulunuz.

Aşağıda Şekil 5 'de $f(x) = x$ fonksiyonunun periodik açılım grafiği verilmiştir. $x = (2k + 1)\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ noktalarında fonksiyon süreksizdir. $f(x) = x$ fonksiyonunun Fourier serisi bu noktalarda "sıfır" a yaklaşır. Bu noktaların dışında aralık içinde veya aralık dışında seri her noktada fonksiyona yaklaşır.



Şekil 5

$f(x) = x$ fonksiyonu bir tek fonksiyon olduğundan,

$a_n = 0$ dır. b_n ise,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin nx - \frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olur. Buna göre, $-\pi < x < \pi$ aralığında,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$$

veya

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$$

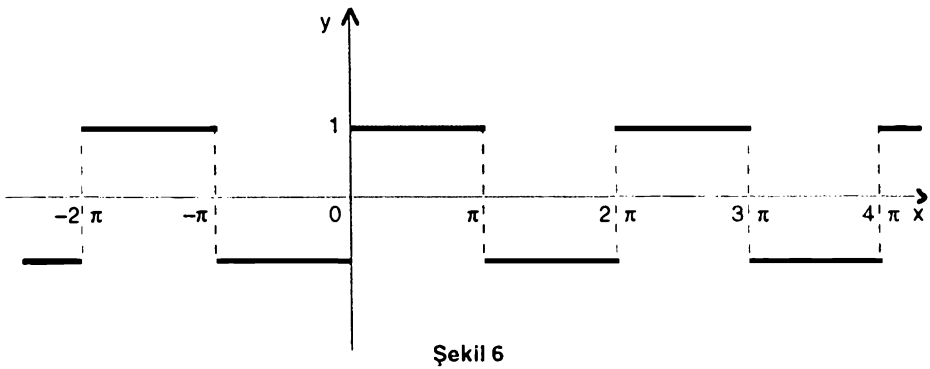
elde edilir.

Örnek 3.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & (0 < x < \pi) \\ -1, & (-\pi < x < 0) \end{cases}$$

fonksiyonu Fourier serisine açınız.

f(x) fonksiyonu bir tek fonksiyondur. Aşağıda Şek. 6 'da, *x* 'in bütün değerleri için bu fonksiyonun 2π periodlu periodik uzanım eğrisi gösterilmiştir. Aralığın uç noktasında ve $x = k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ noktalarında $F(x)$ süreksizdir ve bu noktalarda seri sıfır 'a yaklaşır. $0 < x < \pi$ aralığında seri $f(x) = 1$ 'e ve $-\pi < x < 0$ aralığında ise seri $f(x) = -1$ 'e yaklaşır.



Şekil 6

Bir tek fonksiyon için Fourier katsayıları,

$$a_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

ve

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[-\cos nx\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi n}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{4}{(2n-1)\pi}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olur. Bu değer Fourier serisinde yerine konursa, $0 < x < \pi$ aralığında,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

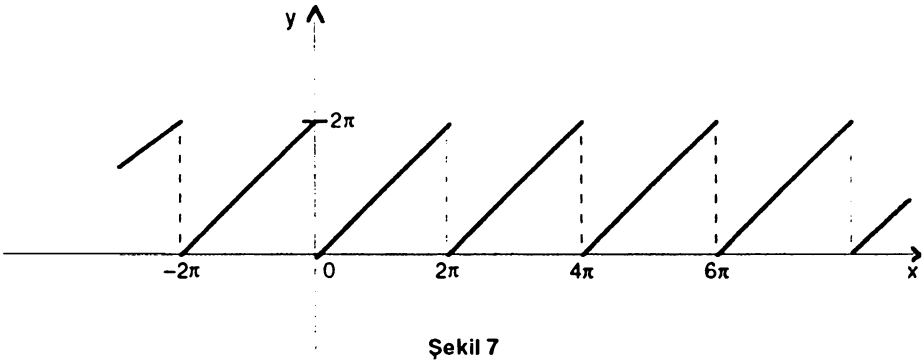
veya

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$$

olur.

Örnek 4. *f(x) = x, (0 < x < 2π)* fonksiyonunu seriye açınız.

f(x) fonksiyonunun periodik açılım grafiği aşağıda Şekil 7 'de verilmiştir. Burada period *2π* ve



Şekil 7

aralığın uç noktaları $-L = 0$ ve $L = 2\pi$ dir. O zaman Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

ve

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \cos nx\, dx\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{1}{n}x \sin nx\right]_0^{2\pi} = 0$$

dır. $f(x) = x$ fonksiyonu bir tek fonksiyon olduğundan a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ nin sıfır olması beklenen bir sonuçtur. b_n ise,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \sin nx\, dx\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

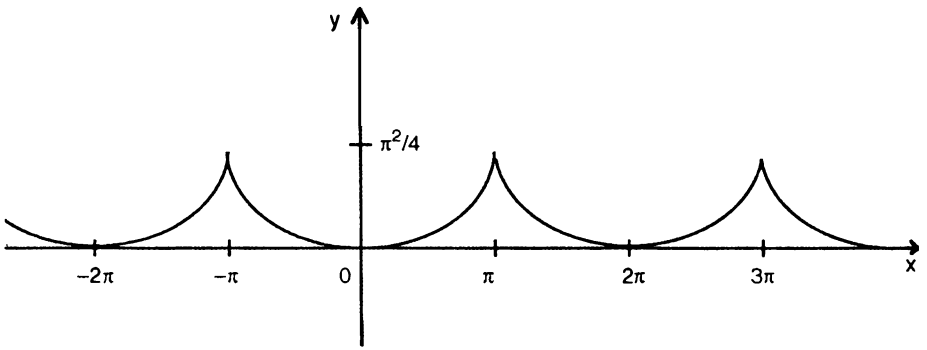
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin nx - \frac{1}{n}x \cos nx\right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}$$

bulunur. Buradan,

$$x = \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right)$$

elde edilir.

Örnek 5. $f(x) = \frac{x^2}{4}$, $(-\pi \le x \le \pi)$ fonksiyonunun (Şekil 8) Fourier serisi açılımını bulunuz.



Şekil 8

$f(x)$ fonksiyonu bir çift fonksiyondur. Bu nedenle $b_n = 0$ ve

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x^2}{4}\cos nx\,dx\,, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

dır. $n = 0$ için $a_0 = \dfrac{\pi^2}{6}$ bulunur.

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx\,, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \frac{1}{2\pi n^3}\int_0^{n\pi} x^2 \cos x\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi n^3}\left[2x\cos x + \left(x^2 - 2\right)\sin x\right]_0^{n\pi}$$

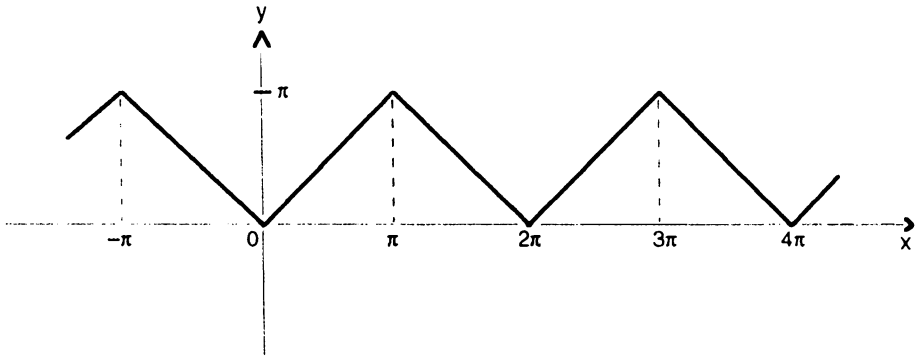
$$= \frac{1}{n^2}\cos n\pi = (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

dır. Böylece,

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right)$$

elde edilir.

Örnek 6. $f(x) = |x|$, $(-\pi \le x \le \pi)$ fonksiyonunun (Şekil 9), Fourier serisi açılımını bulunuz.



Şekil 9

$f(x) = |x|$ fonksiyonu bir çift fonksiyondur. $-\pi \le x \le \pi$ aralığında ve bu aralığın dışında her noktada fonksiyon süreklidir ve bütün bu noktalarda Fourier serisi fonksiyona yaklaşır.

x'in pozitif veya negatif her değeri için, $f(x) = |x| = x$ demektir.

Öyle ise, $-\pi \le x \le \pi$ aralığında,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$$

ve

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{n\pi} x\cos x\,dx = \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos x + x\sin x\right]_0^{n\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n - 1) = \frac{4}{\pi(2n-1)^2}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

dır. Görülüyor ki, n'in "tek" değerleri için $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$ ve çift değerleri için $a_n = 0$ elde edilir. Ayrıca, $f(x) = |x|$ fonksiyonu bir çift fonksiyon olduğu için, adı geçen aralıkta $b_n = 0$ dır. Böylece $-\pi \le x \le \pi$ aralığında,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

veya

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

elde edilir.

Örnek 7. *f(x) = I cos x I, (−π/2 ≤ x ≤ π/2)* fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Verilen fonksiyon x'in her değeri için süreklidir ve bir çift fonksiyondur. f(x) = I cos x I fonksiyonu, her yerde Fourier serisine yaklaşır, Çünkü her yerde Fourier serisi yakınsaktır. $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ aralığında $f(x) = \cos x$'dır. Burada period π ve L ise $\pi/2$'dir. Bu durumda,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = \frac{4}{\pi}$$

olur. Aynı şekilde

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos x \cos 2nx\,dx\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(2n-1)x}{2(2n-1)} + \frac{\sin(2n+1)x}{2(2n+1)}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(2n-1)\pi/2}{2(2n-1)} + \frac{\sin(2n+1)\pi/2}{2(2n+1)}\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{2(2n-1)} - \frac{(-1)^{n+1}}{2(2n+1)}\right]$$

veya

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

bulunur.

f(x) = I cos x I fonksiyonu bir çift fonksiyon olduğundan

$b_n = 0$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ 'dır. Buna göre,

$$f(x) = |\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$$

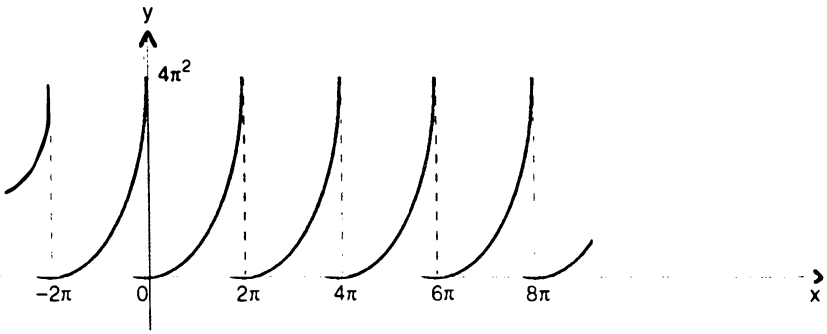
veya

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\cos\frac{2x}{3} - \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} - \ldots\right)$$

elde edilir.

Örnek 8. $f(x) = x^2$, $(0 < x < 2\pi)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Fonksiyonunun periodik açılım eğrisi aşağıda Şek. 10 'da verilmiştir.



Şekil 10

Fonksiyon, ne bir tek fonksiyon ne de bir çift fonksiyondur.

Buna göre,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx - \frac{2}{n^3}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx\right]_0^{2\pi}$$

$$a_n = \frac{4}{n^2}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ve

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\,dx = \left[-\frac{x^2\cos nx}{n} + \frac{2x\sin nx}{n^2} + \frac{2\cos nx}{n^3}\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{4\pi}{n}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

elde edilir. Bütün bu değerler trigonometrik Fourier serisinde yerlerine konursa, $0 < x < 2\pi$ aralığında,

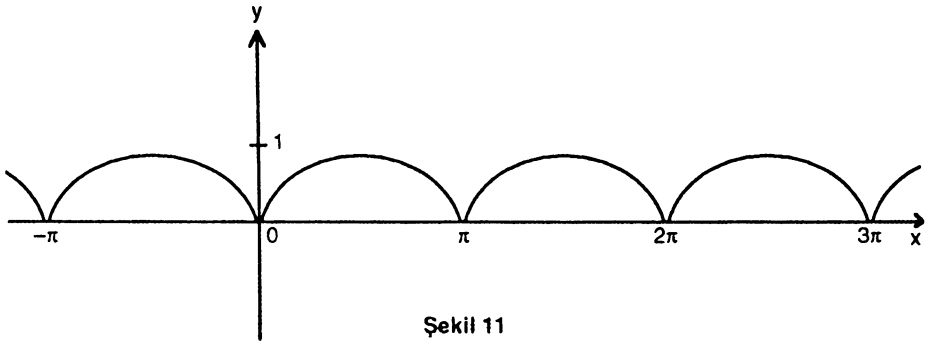
$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\left(\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2}\right)$$

$$-4\pi\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n}\right)$$

elde edilir.

Örnek 9. *f(x) = I sin x I , (0 ≤ x ≤ π)* fonksiyonunun Fourier serisi açılımını bulunuz.

I sin x I fonksiyonu bir çift fonksiyondur ve bu fonksiyonun periodik açılım eğrisi aşağıda Şekil 11 'de verilmiştir.



Şekil 11

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Biliyoruz ki, period *2L = 2π* olduğu zaman,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

olur. Bu problemde ise *2L = π* 'dir. Bu durumda,

$$a_n = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2nx\,dx$$

olur. *0 ≤ x ≤ π* aralığında *f(x) = I sin x I = sin x*

olduğundan, *n = 0* için

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \frac{4}{\pi}$$

bulunur. Aynı şekilde,

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx\, dx, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \left[-\frac{\cos(1-2n)x}{2(1-2n)} - \frac{\cos(1+2n)x}{2(1+2n)} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{ -\frac{1}{2(1-2n)}\left[\cos(1-2n)\frac{\pi}{2} - 1\right] - \frac{1}{2(1+2n)} \right.$$

$$\left. \left[\cos(1+2n) - 1\right] \right\}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2(1-2n)} + \frac{1}{2(1+2n)} \right] = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1-4n^2} \right)$$

veya

$$a_n = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2 - 1}$$

bulunur. Öyle ise, $0 \le x \le \pi$ aralığında,

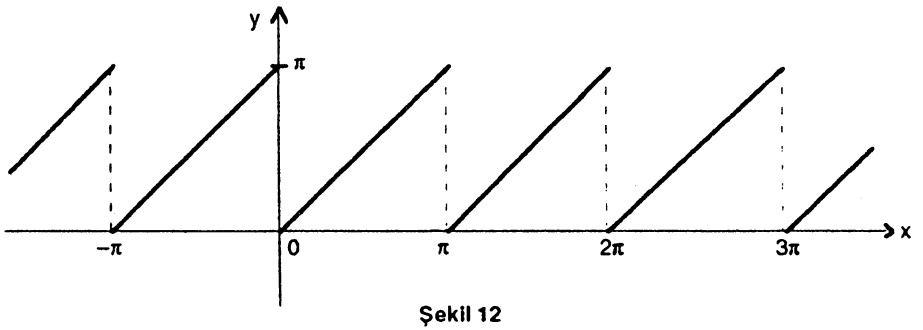
$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}\cos 2nx$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \ldots \right)$$

elde edilir.

Örnek 10. $f(x) = x, \quad (0 < x < \pi)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

$f(x) = x$ fonksiyonu bir tek fonksiyondur. Period π olacak şekilde fonksiyonun periodik açılım eğrisi aşağıda Şek. 12 'de verilmiştir.



Şekil 12

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

Bu problemde $2L = \pi$ 'dir. Bu durumda,

$$b_n = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} x\sin 2nx\,dx, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(2n)^2}\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \frac{1}{\pi n^2}\left[\sin x - x\cos x\right]_0^{n\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}(-n\pi\cos n\pi) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

olur. O zaman, $0 < x < \pi$ aralığında,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin 2nx$$

$$= \frac{\sin 2x}{1} - \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 6x}{3} - \ldots$$

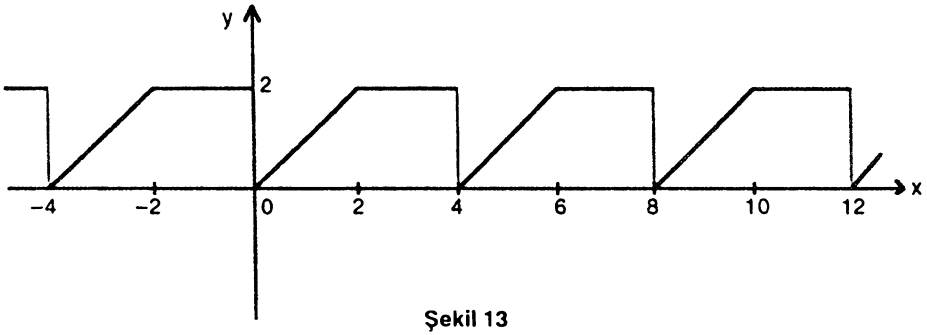
elde edilir.

Örnek 11.
$$f(x) = \begin{cases} 2, & (-2 < x < 0) \\ x, & (0 < x < 2) \end{cases}$$

fonksiyonun Fourier serisi açılımını bulunuz ve x 'in değerlerine bağlı olarak serinin yaklaştığı fonksiyonun periodik eğrisini çiziniz.

$f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilecek olursa açıkça görülüyor ki, fonksiyon x'in -2 ile $+2$ arasındaki değerleri dışında tarif edilmemiştir. Bu aralıkta $x = 0$ noktasında fonksiyon süreksizdir.

Fonksiyonun periodik eğrisi aşağıda Şek. 13 'de



Şekil 13

verilmiştir.

Yukarıda verilen $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisine açılımı,

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

dir. Fourier katsayıları

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx , \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

ve

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx , \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

dır. Burada önce a_0, sonra a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ve b_n aşağıdaki şekilde bulunur.

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} 2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{2} x \, dx = 3$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} 2 \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{2} x \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi x}{2} \right]_{-2}^{0} + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos n\pi - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 [\cos n\pi - 1]$$

veya

$$a_n = \frac{-2\,(1 - \cos n\pi)}{n^2\pi^2}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{2}{n\pi}\right) x \cos\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{2}{n\pi}(-1 + \cos n\pi) + \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi} \cdot 2\cos n\pi\right)$$

veya

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

elde edilir. Bu değerler Fourier serisinde yerine konursa, $-2 < x < 2$ aralığında,

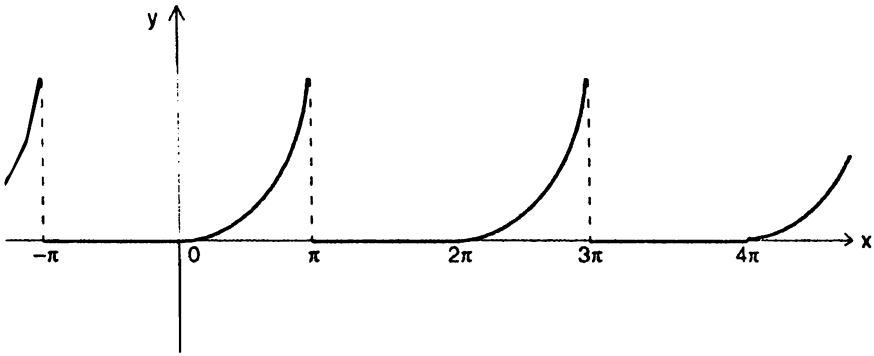
$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]$$

bulunur.

Örnek 12. $f(x) = \begin{cases} 0, & (-\pi < x \le 0) \\ x^2, & (0 \le x < \pi) \end{cases}$

fonksiyonunu seriye açınız.

Fonksiyonun periodik eğrisi aşağıda Şekil 14 'de verilmiştir. Aralığın uç noktalarında fonksiyon süreksizdir.



Şekil 14

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= (-1)^n \frac{2}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \sin nx\,dx\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2 \cos nx}{n} + \frac{2x \sin nx}{n^2} + \frac{2\cos nx}{n^3} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi^2 \cos n\pi}{n} + \frac{2\cos n\pi - 2}{n^3} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ \frac{1}{n^3}\left[(-1)^{n+1}\pi^2 n^2 - 2 + 2(-1)^n \right] \right\}$$

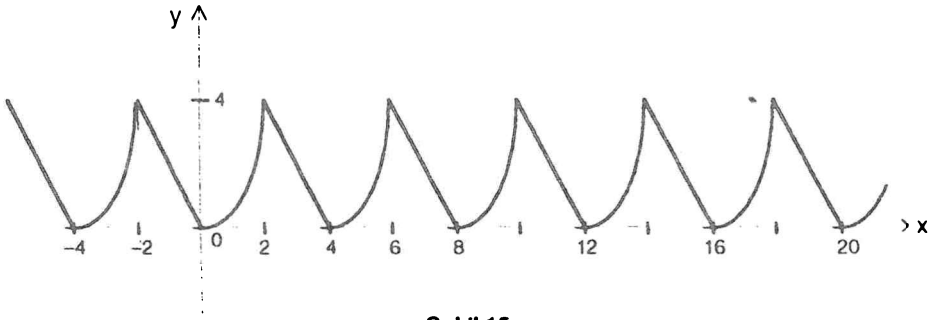
bulunur. Fourier katsayıları yerlerine konursa,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left[(-1)^{n+1} n^2 \pi^2 - 2 + 2(-1)^n \sin nx \right]$$

elde edilir.

Örnek 13. $f(x) = \begin{cases} -2x, & (-2 \le x \le 0) \\ x^2, & (0 \le x \le 2) \end{cases}$

fonksiyonunu seriye açınız. Şekil 15 'e bakınız.



Şekil 15.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} -2x\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x^2\,dx = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} -2x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= -\int_{-2}^{0} x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= -\left[\frac{2}{n\pi}\,x\sin\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{0}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{2x^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} - \frac{16}{n^3\pi^3}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{8x}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{0}^{2}$$

$$= -\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2(1 - \cos n\pi) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 . 2\cos n\pi$$

$$= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2[3\cos n\pi - 1] = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left[3(-1)^n - 1\right],\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} -2x \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= -\int_{-2}^{0} x \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= -\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi} x \cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg]_{-2}^{0}$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{2}{n\pi} x^2 \cos\frac{n\pi x}{2} + 2\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 x \sin\frac{n\pi x}{2} + 2\left(\frac{2}{n\pi}\right)^3 \cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg]_{0}^{2}$$

$$= \frac{4}{n\pi}\cos n\pi + \left[-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^3 (\cos n\pi - 1)\right]$$

$$= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^3 (\cos n\pi - 1) = -2\left(\frac{2}{n\pi}\right)^3, \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

elde edilir.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left[3(-1)^n - 1\right]\cos\frac{n\pi x}{2}$$

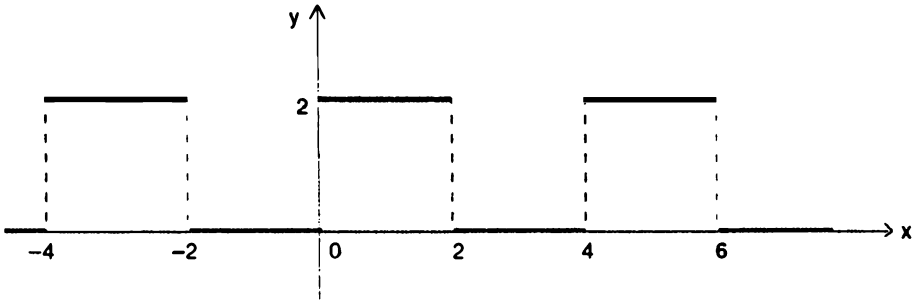
$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^3 \sin\frac{n\pi x}{2}$$

(Tek sayılar)

bulunur.

Örnek 14. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ 2, & 0 < x < 2 \end{cases}$

fonksiyonunu seriye açınız. Şekil 16'ya bakınız.



Şekil 16

Verilen fonksiyonun periodik eğrisi kare dalga adını alır ve peryodu $T = 2L = 4$ 'dür.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2\,dx = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 2\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 2\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

bulunur. Böylece,

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi)\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin 5\frac{\pi x}{2} + \ldots\right)$$

elde edilir. Burada açıkça görülüyor ki, $f(x)$ 'in süreksiz olduğu $x = 0, \pm 2n$ noktalarında seri sıfır 'a ve $f(x)$ fonksiyonu $a_0/2 = 1$ 'e yaklaşıyor.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen fonksiyonları Fourier serisine açınız.

(a) $f(x) = x, \quad 0 < x < 4$

(b) $f(x) = x^2, \quad 0 < x < \pi$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} -\pi/2, & -\pi < x < \pi \\ \pi/2, & 0 < x < \pi \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^2}{4}, \quad 0 < x < \pi$

(h) $f(x) = 2x + 1, \quad -1 \le x \le 1$

(i) $f(x) = \cos \dfrac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi$

(j) $f(x) = \begin{cases} L + x, & -L \le x < 0 \\ L - x, & 0 \le x < L \end{cases}$

(k) $f(x) \begin{cases} \dfrac{2}{3}x, & 0 \le x \le 3 \\ -\dfrac{2}{3}x, & -3 \le x \le 0 \end{cases}$

(l) $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{\pi x}{L} & 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ 0, & \dfrac{L}{2} < x \le L \end{cases}$

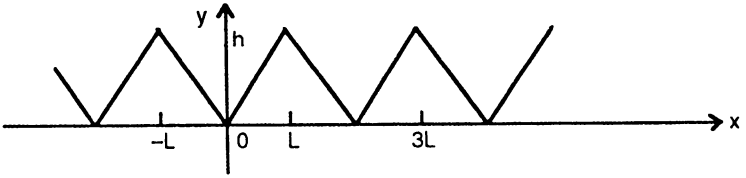
2. Örnek 14 'den yararlanarak,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right)$$

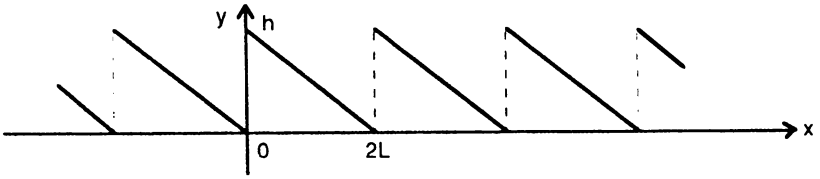
olduğunu isbatlayınız.

3. Aşağıda grafikleri verilen periodik fonksiyonları bulunuz ve verilen aralıklarda Fourier serisine açınız.

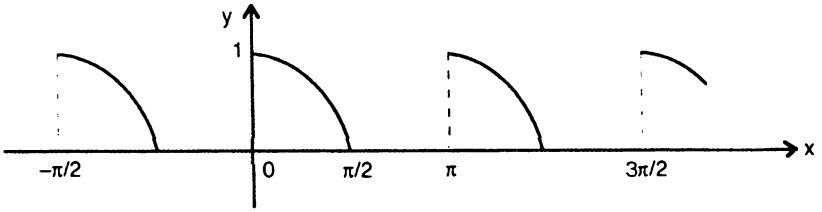
(a)



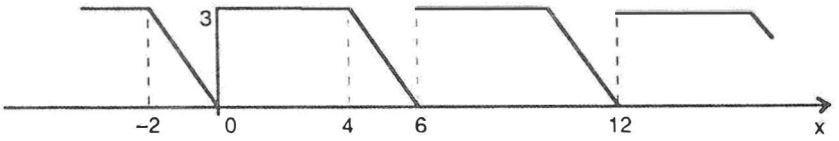
(b)



(c)



(d)



Şekil 17

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ serisinin değerini bulunuz.

BÖLÜM
10

Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

10-1 GİRİŞ

Adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin en belirgin özelliği, belirli bir diferansiyel denklemin, değişen başarı ve etkinlik derecelerinde oldukça fazla sayıda yöntemle çözülebilmesidir. Var olan sayısal teknikler, diferansiyel denklemlerin doğrusal veya doğrusal olmayan özelliklerinden ya da başlangıç ve sınır koşullarından fazlaca etkilenmeden küçük değişikliklerle farklı tipte diferansiyel denklem çözümlerine uygulanabilirler. Bir diferansiyel denkleme analitik bir çözüm ararken, söz konusu diferansiyel denklemin tipine uygun bir yöntem arama zorunluluğu karşısında, sayısal çözümler genel olarak diferansiyel denklemin biçiminden bağımsızdır. Doğrusal diferansiyel denklemlerin tam analitik çözümlerinde bile kayda değer güçlüklerle karşılaşılabilir. Buna ek olarak doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin tam analitik çözümleri ise bazen olanaksızdır. Bu koşullar, diferansiyel denklemlerin çözümü için etkin sayısal yöntemlerin geliştirilmesini zorlamıştır.

Adi diferansiyel denklemler için var olan sayısal çözüm tekniklerin oldukça güçlü olmasına karşın, bu sayısal yöntemlerin kendilerine özgü güçlükleri de vardır. Bu bölümde değişik sayısal yöntemler ele alınırken yöntemlerin etkinlikleri, kararlılıkları ve varsa zayıf tarafları incelenmeye çalışılacaktır.

Adi diferansiyel denklemleri iki ana bölüme ayıracağız. Birincisi, "Başlangıç Değer Problemleri", ikincisi ise "Sınır Değer Problemleri" dir.

Başlangıç değer problemi; Tüm koşulların bağımsız değişkeninin bir tek değerinde tanımladığı bir problemdir. Bağımsız değişkenin başlangıç değeri diye mutlaka sıfır değerini kabul etmek gerekmez. Başlangıç koşullarının tümü, bağım-

sız değişkenin belirli bir değerine karşılık gelmelidir. Tipik bir başlangıç değer problemi aşağıda verilmiştir.

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = g(t)$$

Başlangıç koşulları: $y(0) = y_0$, $\frac{dy}{dt}(0) = u_0$

Yukarıdaki diferansiyel denklem, basit harmonik bir osilatörün zorlamalı yanıtını tanımlamaktadır. Başlangıç değer problemlerinde, vurgulanması gereken önemli bir özellik de, bağımsız değişkenin mutlaka "zaman" olması gerekmediğidir. Bağımsız değişken, "konum" da olabilir ve "konumun" belirli bir değeri için tüm koşullar verili ise bu da bir başlangıç değer problemidir.

Sınır Değer Problemi; Koşulların, bağımsız değişkenin iki ve daha fazla değeri için belirlendiği bir problemdir. Tipik bir örnek aşağıda verilmiştir.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + d\frac{dy}{dx} + cy = h(x)$$

Sınır koşulları: $y(0) = y_0$, $y(L) = y_1$

Yukarıda tipik örnekte, tek boyutlu yatışkın ısı aktarımında sıcaklık dağılımı belirlenmektedir. $x = 0$ ve $x = L$ konumlarında sırası ile y_0 ve y_1 sıcaklık değerleri sınır koşulu olarak bilinmektedir. Bir başka örnek şöyle verilebilir,

$$\frac{d^4y}{dx^4} + ay = f(x)$$

Sınır koşulları: $y(0) = y_0$, $\frac{dy}{dx}(0) = u_0$, $\frac{d^2y}{dx^2}(0) = v_0$, $y(L) = y_1$

Sınır koşulları ikiden fazla bağımsız değişken değeri için de tanımlanabilir.

$$y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{dx}(L_1) = v_0, \quad \frac{d^2y}{dx^2}(L_1) = v_0, \quad y(L_2) = y_1$$

Bu bölümde gerek başlangıç değer problemi gerekse sınır değer problemi olarak bilinen diferansiyel denklemlere ait sayısal yöntemler verilerek bu yöntemlere ilişkin hata çözümlemeleri ve bunlara bağlı olarak örnek ve uygulamalar sunulacaktır.

10-2 GENEL BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

En basit başlangıç değer problemi olarak, birinci mertebeden doğrusal bir diferansiyel denklemi göz önüne alalım,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

Denklem (1) 'e çözüm bulabilmek için gerekli ve yeterli koşulları, kanıtlarına girmeden şöyle belirtebiliriz:

(a) x_0 ve b sonlu değerler olmak üzere, $f(x, y)$ fonksiyonu, $x_0 \leq x \leq b$ ve $-\infty \leq y \leq +\infty$ aralıklarında tanımlı ve süreklidir.

(b) $[x_0, b]$ kapalı aralığında, herhangi bir x değeri için öyle bir L sabiti vardır ki, herhangi iki y ve y^* sayıları için şu bağıntı geçerlidir.

$$|f(x, y) - f(x, y^*)| \leq L\,|y - y^*|$$

Bu bağıntı, ortalama değer kuramının bir uzantısıdır ve $f(x, y)$ fonksiyonunun türetilebilir (türevi var olan) bir fonksiyon olduğunun kanıtıdır.

Yukarıda belirtilmeye çalışılan koşullar, denklem (1) 'deki diferansiyel denklemi sağlayan tek, sürekli ve türetilebilen bir $y(x)$ fonksiyonunun varlığı için yeterlidir.

Herhangibir başlangıç değer problemi, eğer birinci mertebeden ise, herbiri bir başlangıç değerine denk gelen birinci mertebe diferansiyel denklemlerden oluşan bir kümeye indirgenebilir. Örneğin basit bir harmonik osilatörü belirleyen aşağıdaki diferansiyel denklemi gözönüne alalım.

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = g(t) \tag{2}$$

$$y(0) = y_0 \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = u_0 \tag{4}$$

Denklem (2) de gösterilen başlangıç değer probleminin başlangıç koşulları denklem (3) ve (4) te verilmiştir. Bu denklem birinci mertebe diferansiyel denklemlerden oluşan bir kümeye dönüştürülebilir.

$$z = \frac{dy}{dt} \tag{5}$$

dönüşümünü tanımlayacak olursak,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{6}$$

elde edilir.

Denklem (5) ve (6), (2) de yerine konulacak olursa,

$$a\frac{dz}{dt} + bz + cy = g(t) \tag{7}$$

bulunur. Denklem (5) ve (7) düzenlenerek, denklem (2) ile gösterilen ikinci mertebe diferansiyel denkleme denk gelen birinci mertebe diferansiyel denklem kümesi elde edilebilir.

$$\frac{dy}{dt} = z \tag{8}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{b}{a}z - \frac{c}{a}y + \frac{g(t)}{a} \tag{9}$$

Başlangıç koşulları:

$$y(0) = y_0 \quad \text{ve} \quad z(0) = u_0 \tag{10}$$

Buna benzer şekilde n mertebeden bir diferansiyel denklem, n tane birinci mertebe diferansiyel denklemden oluşan bir kümeye dönüştürülebilir.

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y = g(t) \tag{11}$$

diferansiyel denkleminin, n tane bağımsız birinci mertebe diferansiyel denklemden oluşan küme karşılığı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, t)\\
\frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n, t)\\
&\vdots\\
\frac{dy_n}{dt} &= f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n, t)
\end{aligned} \tag{12}$$

Başlangıç koşulları:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_{10} \\ y_2(0) &= y_{20} \\ &\vdots \\ y_n(0) &= y_{n0} \end{aligned} \qquad (13)$$

Görüldüğü gibi, herhangi bir başlangıç değer problemi birinci mertebe başlangıç değer problemi kümesi olarak betimlenebilmektedir. Bu bakımdan, bu konuda öncelikle birinci mertebe bir başlangıç değer probleminin sayısal çözümü üzerinde yoğunlaşacağız.

10-3 EULER YÖNTEMİ

Birinci mertebe başlangıç değer probleminin en basit çözüm yöntemi olması ve hata çözümlemesinin kolaylığı açısından Euler yöntemi belirli bir ayrıntı ile ele alınacaktır. Aşağıdaki birinci mertebe başlangıç değer problemini gözönüne alalım,

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \qquad (14)$$

$$y(0) = y_0 \qquad (15)$$

Denklem (14) te yer alan türev, dy/dt yerine ileri sonlu fark karşılığı yazılabilir.

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = f(y_i, t_i) \qquad (16)$$

Denklem (16) dan y_{i+1} çekilecek olursa;

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t\ f(y_i, t_i) \qquad (17)$$

elde edilir. $t = 0$ daki fonksiyon değerini başlangıç koşulu olarak bildiğimiz için çözüm kendi kendine başlayabilir ve istenen bağımsız değişken değerine, tanımlanmış ve verili Δt adım aralıkları ile sürdürülebilir. Denklem (17) de verilen rekürans bağıntısı EULER yöntemi olarak bilinir. Buna göre çözüm, algoritmik olarak şöyle verilebilir.

1° Başlangıç koşulu tamlanır.

$t = t_0$ da $y = y_0$

Δt adım aralığı belirlenir.

2° (t_0, y_0) noktasında $f(y_0, t_0)$ hesaplanır.

3° Denklem (17) den yararlanarak,

$$y_1 = y_0 + f(y_0, t_0)\,\Delta t$$

hesaplanır.

4° $t_1 = t_0 + \Delta t$ yeni bağımsız değişken değeri elde edilir.

5° Eğer, t_1, değeri verili son değere ulaşmış ise işleme son verilir. Ulaşmamış ise $f(y_1, t_1)$ ve,

$$y_2 = y_1 + f(y_1, t_1)\,\Delta t \text{ hesaplanır.}$$

6° yeni bağımsız değişken değeri elde edilerek işleme devam edilir. İşlemler 4°. adımdan başlayarak benzer biçimde gerçekleştirilir.

Örnek 1. $\dfrac{dy}{dt} = -y^2$

Başlangıç koşulu $t = 0$ da $y = 1$ dir. O halde,

$$y_{i+1} = y_i + (-y^2)\,\Delta t$$

bağıntısını kullanarak işlem şöyle gerçekleştirilir.

$t = 0 . 1$ de:

$$y_1 = y_0 + (-y_0^2)\,(\Delta t)$$

$$y_1 = 1 + (-1^2)\,(0.1) = 0.9$$

$t = 0.2$ de:

$$y_2 = y_1 + (-y_1^2)\,(\Delta t)$$

$$y_2 = 0.9 + (-0.9^2)\,(0.1) = 0.819$$

$t = 0.3$ de:

$$y_3 = y_2 + (-y_2^2)\,(\Delta t)$$

$$y_3 = 0.819 + (-0.819^2)\,(0.1) = 0.752$$

Bu diferansiyel denklemin analitik çözümü, $y = 1/(1+t)$ dir. Buna göre, sayısal ve analitik çözünürlerin sonuçları aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

t	Sayısal Çözüm	Analitik Çözüm
0	1	1
0.1	0.9	0.90909
0.2	0.819	0.83333
0.3	0.752	0.76933

Bu örnekte kullanılan Δt değeri ile elde edilen sayısal sonuçlar, analitik sonuçlara pek yakın sayılamazlar. Euler yöntemi belirli problemlerde, küçük Δt değerleri için duyarlı sonuçlar vermekle birlikte, genel olarak var olan etkin yöntemlere kıyasla daha duyarsızdır. Ancak gerek sayısal çözüm kavramlarının anlaşılması gerekse hata çözümlemesinin kolaylığı açısından incelenmeye değer görülmüştür.

Bağımsız değişkenin adım aralığı Δt, aynı zamanda h ile de gösterilebilir. Bu durumda denklem (17) tekrar yazılacak olursa,

$$y_{i+1} = y_i + f(y_i, t_i)h \tag{18}$$

elde edilir.

10-3.1 EULER YÖNTEMİNDE KESİM HATASI

Kesim hatasının (truncation error) kavramlarını Euler yöntemini inceleyerek izlemeye çalışalım. t_i noktasından başlayarak $h = \Delta t$ kadar ilerleyip t_{i+1} noktasındaki fonksiyon değerini Euler bağıntısını kullanarak bulabiliriz.

$$y_{i+1} = y_i + hf(y_i, t_i) \tag{19}$$

Kesim hatasının incelenmesini basitleştirmek amacı ile bu noktada yuvarlama hatası (roundoff error) olmadığını varsayalım. Diferansiyel denklemin, sonlu fark çözümü (Euler Yöntemi) ve analitik çözümü arasındaki farkı betimlemek için analitik çözümü Y ile gösterelim. Diyelim ki, t_1 den t_{i+1} değerine bir adım atmak için denklem (19) 'u kullanmış olalım ve t_i değerindeki Y_i değerini bilerek bu bağıntıda başlangıç değeri olarak y_i yerine koymuş bulunalım:

$$y_{i+1} = Y_i + hf(Y_i, t_i) \tag{20}$$

Analitik çözüm, Y, t_i etrafında sürekli ve türetilebilir ise Y_{i+1} değerini Taylor açılımına göre elde edebiliriz:

$$Y_{i+1} = Y_i + h\frac{dy}{dt}(t_i) + \frac{h^2}{2!}\frac{dy^2}{dt^2}(t_i) + \frac{h^3}{3!}\frac{dy^3}{dt^3}(t_i) + \ldots \tag{21}$$

Burada,

$$\frac{dy}{dt}(t_i) = f(Y_i, t_i),\ \frac{d^2y}{dt^2}(t_i) = f'(Y_i, t_i),\ \frac{d^3y}{dt^3}(t_i) = f''(Y_i, t_i)$$

olduğuna göre denklem (21) şöyle yazılabilir.

$$Y_{i+1} = Y_i + hf(Y_i, t_i) + \frac{h^2}{2!}f'(Y_i, t_i) + \frac{h^3}{3!}f''(Y_i, t_i) \tag{22}$$

Denklem (20) den denklem (22) yi çıkaracak olursak,

$$y_{i+1} - Y_{i+1} = E_{i+1} = -\frac{h^2}{2} f'(Y_i, t_i) + 0(h^3) \tag{23}$$

elde edilir. $O(h^3)$, h^3 çarpanını içeren terim ve bu terimden sonraki tüm terimleri içeren bir grubu temsil etmektedir. E_{i+1} ise t_i den t_{i+1} e bir adımda gitmek üzere yapılan kesim hatasıdır. E_{i+1}, algoritmada adım başına yapılan kesim hatası olarak bilinir. Denklem (23) te hata ikinci mertebedendir.

$$y_{i+1} - Y_{i+1} = E_{i+1} = 0(h^2) \tag{24}$$

Denklem (23) 'e bakacak olursak E_{i+1} hatasına ilişkin kesin bir değer elde etmek olanaksızdır. Çünkü Taylor açılımı ile sonsuz bir seri elde edilmiştir. Ancak hatanın bir üst sınırını elde edebiliriz. Taylor seri açılımının hata terimini kullanarak denklem (23) 'ten hareket edip aşağıdaki bağıntıyı elde edebiliriz;

$$E_{i+1} = -\frac{h^2}{2} f'(Y_i, u_i) \tag{25}$$

u_i, (t_i, t_{i+1}) açık aralığında bir değerdir. Fakat, halâ bir bilinmeyenle karşı karşıyayız. u_i değeri bilinmemektedir. Ancak, (t_i, t_{i+1}) aralığında öyle bir u_i değeri seçebiliriz ki $f'(Y_i, u_i)$ fonksiyonu söz konusu aralıkta en yüksek değerini alabilsin. Böylece E_{i+1}, adım hatasının bir üst sınırından söz etmek olasıdır. $f'(Y_i, u_i)$ fonksiyonuna en yüksek değeri verecek u_i değeri u_i^* ise,

$$(E_{i+1})_{üst} = -\frac{h^2}{2} f'(Y_i, u_i^*) \tag{26}$$

elde edilir. Hata üst değerini mutlak olarak yazacak olursak şu bağıntıyı elde ederiz;

$$|E_{i+1}|_{üst} = \frac{h^2}{2} f'(Y_i, u_i^*) \tag{27}$$

Yukarıda belirtildiği gibi, E_{i+1}, bir adımda oluşan hatadır. Buna karşılık algoritmanın çözüm sürecinde bu adıma gelinceye kadar her adımda oluşan hataların birikimi de sözkonusudur. Ayrıca, E_{i+1} hatasının oluştuğu adımdan sonraki adımlarda da hata birikimi devam edecektir. Bu bakımdan Euler algoritmasında oluşan toplam hatayı hesaplamak yararlı ve yerinde olacaktır. Denklem (19) dan, denklem (22) yi çıkaracak olursak şu sonuçla karşılaşırız;

$$Y_{i+1} - Y_{i+1} = y_i - Y_i + h\left[f(y_i, t_i) - f(Y_i, t_i)\right] + E_{i+1} \tag{28}$$

Bir adımda yapılan hatayı elde ederken, çözümün t_i değerinden başladığını varsaymıştık. Ancak çözüm, $t = t_0$ değerinden başladığına göre $(y_{i+1} - Y_{i+1})$ farkı,

başlangıçtan itibaren oluşan toplam hata olacaktır. Toplam hata, e_{i+1} ile gösterilecek olursa, denklem (28) şu şekilde yazılabilir.

$$e_{i+1} = e_i + h\left[f(y_i, t_i) - f(Y_i, t_i)\right] + E_{i+1} \tag{29}$$

E_{i+1} yerine denklem (25) de elde edilen sonucun mutlak değerini yazacak olursak,

$$e_{i+1} = e_i + h\left[f(y_i, t_i) - f(Y_i, t_i)\right] + \frac{h^2}{2} f'(Y_i, u_i) \tag{30}$$

elde edilir. Denklem (30) dan toplam hata farkının mutlak değerini elde edebiliriz.

$$|\Delta e_i| = |e_{i+1} - e_i| = h\left[f(Y_i, t_i) - f(Y_i, t_i)\right] + \frac{h^2}{2} f'(Y_i, u_i) \tag{31}$$

Bu bölümün giriş alt bölümünde de belirtildiği gibi, ortalama değer kuramına göre z_i, y_{i+1} ile Y_i arasında herhangi bir değer olmak üzere aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\frac{f(y_i, t_i) - f(y_i, t_i)}{y_i - Y_i} \leq \frac{\partial f}{\partial y}(z_i, t_i) = K \tag{32}$$

Buradan,

$$|f(y_i, t_i) - f(Y_i, t_i)| \leq K\,|y_i - Y_i| = K\,|e_i| \tag{33}$$

elde edilir. Denklem (33), denklem (31) de kullanılarak şu eşitsizliği elde edebiliriz.

$$|e_{i+1} - e_i| \leq hK\,|e_i| + \frac{h^2}{2} f'(Y_i, u_i) \tag{34}$$

$M = f'(Y_i, u_i)$ kısaltmasını yaparak ve

$$|e_{i+1} - e_i| > |e_{i+1}| - |e_i| \tag{35}$$

eşitsizlik ilkesini gözönünde tutarak denklem (34) yeni şekli ile şöyle elde edilebilir:

$$|e_{i+1}| - |e_i| \leq hK\,|e_i| + \frac{Mh^2}{2} \tag{36}$$

Buradan

$$|e_{i+1}| \leq (1 + hK)\,|e_i| + \frac{Mh^2}{2} \tag{37}$$

bulunur.

Denklem (37) bir rekürans bağıntısıdır. Bu bağıntının başlangıç koşulu $e_0 = 0$ dır. Çünkü algoritmanın başlangıçta yarattığı hata yoktur. Buradan hareket ederek,

$$e_0 = 0$$

$$e_1 \le (1 + hk)\,(0) + \frac{Mh^2}{2} \le \frac{Mh^2}{2}$$

$$e_2 \le (1 + hK)\left(\frac{Mh^2}{2}\right) + \frac{Mh^2}{2} \le (2 + hK)\frac{Mh^2}{2}$$

$$e_3 \le (1 + hK)\,(2 + hK)\frac{Mh^2}{2} + \frac{Mh^2}{2} \le \left[1 + (1 + hK)\,(2 + hK)\right]\frac{Mh^2}{2}$$

$$\vdots$$

dizisi sürdürülecek olursa,

$$|e_i| \le \frac{Mh}{2K}\left[(1 + hK)^i - 1\right] \tag{38}$$

toplam hata bağıntısı elde edilir. Eğer; M ve K değerleri için maksimum değerler elde edilebilirse i. adıma kadar biriken hatanın, $|e_i|$, bir üst sınırında söz edebiliriz.

$M = f'(Y_i, u_i)$ olduğundan, t_i , t_{i+1} aralığı içinde M değerini maksimum yaparak u^*_i değerini seçerek M değişkeninin üst sınır değerini elde edebiliriz.

$$M_{üst} = |f'(Y_i, u_i)|_{üst} = |f'(Y_i, u^*_i)| \tag{39}$$

Aynı işlemi K değeri için yapabiliriz. Eğer y_i , Y_i aralığı içinde K değişkenine en üst değeri verebilecek z_i değerini (z_i^*) saptayabilirsek

$$K_{üst} = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(z_i, t_i)\right|_{üst} = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\left(z_i^*, t_i\right)\right| \tag{40}$$

O halde

$$|e_i|_{üst} \le \frac{M_{üst}h}{2K_{üst}}\left[(1 + hK_{üst})^i - 1\right] \tag{41}$$

bağıntısına varılır. Denklem (41), Euler yönteminde, i. adımda elde edilen toplam hata üst sınırını verir.

Örnek 2. $\dfrac{dy}{dt} = t + y$, $y(0) = 0$

diferansiyel denklemini $t = 1.0$ değerine kadar $h = 0.1$ adım aralığını kullanarak çözünüz. Adım ve toplam hataları hesaplayarak gerçek değerleri ile kıyaslayınız.

Çözüm:

Bu diferansiyel denklemde $f(y, t) = t + y$ dir. Analitik çözüm ise şöyledir.

$y = e^t - t - 1$

Çözüm aşamasının ilk üç adımı göstererek tüm sonuçları bir çizelgede göstermeye çalışalım. Euler denklemini yazalım:

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(y_i, t_i)$$

Buradan

$$y_1 = y_0 + hf(y_0, t_0)$$

$$y_1 = 0 + 0.1\,(0) = 0 \quad ; \quad t = 0.1$$

$$y_2 = 0 + 0.1\,(0.1) = 0.01 \quad ; \quad t = 0.2$$

$$y_3 = 0.01 + 0.1\,(0.2 + 0.01) = 0.031 \quad t = 0.3$$

Analitik çözüme göre karşılık gelen değerler, $Y_0 = 0$ olmak üzere,

$$Y_1 = e^{0.1} - 0.1 - 1 = 0.0052$$

$$Y_2 = 0.0214$$

$$Y_3 = 0.0499$$

şeklinde bulunur. Adım hatalarını hesaplayabilmek için denklem (20) yi gözönüne alalım. Burada elde edilen yaklaşık fonksiyon değeri, bir adım önce gerçek fonksiyonun bilinen değerinden yararlanarak bulunmuştur. Euler yöntemini uygularken, her adımda elde edilen hata, toplam hatadır. Çünkü söz konusu hesaplama adımından önce geçen adımlardaki hataların birikimini de içermektedir. O halde adım başına hatayı, ya da başka bir deyişle yerel hatayı o adımdan bir önceki adımdaki gerçek fonksiyon değerini bilmemiz gerekmektedir. Denklem (20) yi kullanarak bilinen fonksiyon değerlerinden bir sonraki adımın fonksiyon değerini hesaplayabiliriz:

$$y_{i+1} = Y_i + hf(t_i, Y_i) \tag{42}$$

Buna bağlı olarak yerel hata (adım başına hata)

$$E_{i+1} = y^*_{i+1} - Y_{i+1} \tag{43}$$

bağıntısı ile elde edilebilir. Öncelikle y_{i+1} değerlerini hesaplayalım. Problemden, $f(t_i, Y_i) = t_i + Y_i$, bilinmektedir. Buna göre ilk üç adım için,

$$y^*_1 = Y_0 + 0.1\,(t_0 + Y_0)$$

$$y^*_1 = 0 + 0.1\,(0 + 0) = 0$$

$$y^*_2 = Y_1 + 0.1\,(Y_1 + t_1)$$

$$y^*_2 = 0.0052 + 0.1\,(0.0052 + 0.1) = 0.0157$$

$$y^*_3 = 0.0214 + 0.1\,(0.0214 + 0.2) = 0.0435$$

Buna bağlı olarak yerel hata değerleri şöyle elde edilebilir. Denklem (43) kullanılarak

$$E_1 = y^*_1 - Y_1 = 0 - 0.0052 = -0.0052$$

$$E_2 = y^*_2 - Y_2 = 0.0157 - 0.0214 = -0.0057$$

$$E_3 = y^*_3 - Y_3 = 0.0435 - 0.0499 = -0.0064$$

bulunur.

Her adımda oluşabilecek hata üst sınırını hesaplamak için denklem (27) kullanılabilir. $f'(Y, t) = d^2Y/dt^2$ fonksiyonu örnek problemde $f'(Y, t) = e^t$ dir. Denklem (27) de u^*_i değişkeninin değeri, $t_i < t < t_{i+1}$ aralığında e^t fonksiyonunun en yüksek değerini aldığı t değeridir. Problem verilerinden de görüleceği gibi, t artan bir değişken olduğu için, $u^*_i = t_{i+1}$ olur.

O halde

$$|E_i|_{üst} = \frac{h^2}{2} f'(Y_i, t_{i+1}) \qquad (44)$$

İlk üç adım için yerel hatanın (adım başına hata) üst sınır değerlerini hesaplayalım:

$$(E_1)_{üst} = (0.1^2/2)\, e^{0.1} = 0.0055$$

$$(E_2)_{üst} = (0.1^2/2)\, e^{0.2} = 0.0061$$

$$(E_3)_{üst} = (0.1^2/2)\, e^{0.3} = 0.0067$$

Elde edilen sonuçlara bakılacak olursa, ilk adımda yerel hata üst sınırı, 0.0055 dir. Buna karşılık ilk adımda hesaplanan yerel hata −0.0052 dir. Yerel hata, üst sınırın altında bir değerdedir. Diğer sonuçlarda da benzer bir değerlendirme yapabiliriz. Her adımda oluşan yerel hata değerleri, yerel hata üst değerlerinin altındadır. Toplu sonuçlar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Çizelgedeki değerler dördüncü etkin basamağa göre yuvarlanmıştır.

i	t_i	Y_i	y_i	y_i	E_i	$E_{i\ üst}$
0	0.0	0	0.0000	0.0000	–	–
1	0.1	0.0052	0.0000	0.0000	–0.0052	0.0055
2	0.2	0.0214	0.0100	0.0157	–0.0057	0.0061
3	0.3	0.0499	0.0310	0.0435	–0.0064	0.0067
4	0.4	0.0918	0.0641	0.0849	–0.0069	0.0075
5	0.5	0.1487	0.1105	0.1410	–0.0077	0.0082
6	0.6	0.2221	0.1716	0.2136	–0.0085	0.0091
7	0.7	0.3138	0.2488	0.3043	–0.0095	0.0101
8	0.8	0.4255	0.3437	0.4152	–0.0103	0.0111
9	0.9	0.5596	0.4581	0.5480	–0.0116	0.0123
10	1.0	0.7183	0.5939	0.7056	–0.0127	0.0136

Yukarıdaki çizelgeden yararlanarak her adımda oluşan toplam hatayı hesaplayabiliriz.

$$e_i = y_i - Y_i \tag{45}$$

İlk üç adım için hesaplarsak;

$$e_1 = y_1 - Y_1 = 0 - 0.0052 = -0.0052$$

$$e_2 = y_2 - Y_2 = 0.0100 - 0.0214 = -0.0114$$

$$e_3 = y_3 - Y_3 = 0.0310 - 0.0499 = -0.0189$$

elde edilir. Şimdi her adımda oluşan toplam hata üst sınırını bulmaya çalışalım. Önce denklem (41) de yer alın $M_{üst}$ ve $K_{üst}$ değerlerini hesaplayalım. Denklem (39) dan yararlanarak,

$M_{üst} = e^{t_i}$ $(t_{i+1} < t < t_i$ aralığında üst sınır)

bulunur. $f(Y, t) = y + t$ olduğuna göre, denklem (40) taki $\partial f(z^*_i, t_i)/\partial y$ türevini hesaplarsak

$$K_{üst} = 1.0$$

elde edilir. Bu sonuçlara göre denklem (41) den toplam hata üst sınır değerleri bulunabilir.

$$|e_i|_{üst} = \frac{e^{t_i} \cdot h}{2} \left[(1+h)^i - 1\right]$$

İlk üç adım için toplam hataları hesaplayalım.

$$|e_1|_{üst} = \frac{e^{0.1}}{2} (0.1)\left[(1 + 0.1)\right] = 0.0055$$

$$le_2\ l_{üst} = \frac{e^{0.2}}{2}\ (0.1)\ [(1 + 0.1)^2 - 1\ ] = 0.0128$$

$$le_3\ l_{üst} = \frac{e^{0.3}}{2}\ (0.1)\ [(1 + 0.1)^3 - 1\ ] = 0.0223$$

Sonuçları aşağıdaki çizelgede toplayabiliriz.

i	t_i	e_i	$le_i\ l_{üst}$
0	0.0	0	– –
1	0.1	–0.0052	0.0055
2	0.2	–0.0114	0.0128
3	0.3	–0.0189	0.0223
4	0.4	–0.0277	0.0346
5	0.5	–0.0382	0.0503
6	0.6	–0.0505	0.0703
7	0.7	–0.0650	0.0955
8	0.8	–0.0818	0.1272
9	0.9	–0.1015	0.1670
10	1.0	–0.1244	0.2166

Örnek 3. $\frac{dy}{dt} = -\frac{4t}{y} + ty, \qquad y(0) = 3$

başlangıç değer problemini Euler yöntemini kullanarak üç adım için çözünüz. $h = 0.1$ alınız.

Çözüm: $f(y, t) = -\frac{4t}{y} + ty$

Euler bağıntısından,

$$y_{i+1} = y_i + f(y, t)h$$

$$y_{i+1} = y_i - \left(\frac{4t_i}{y_i} - t_i y_i\right) 0.1$$

şeklinde elde edilen rekürans bağıntısı ile şu sonuçlara varılır.

t	y
0.0000	3.0000
0.1000	3.0000
0.2000	3.0167
0.3000	3.0505
0.4000	3.1027
0.5000	3.1752
0.6000	3.2710
0.7000	3.3939
0.8000	3.5489
0.9000	3.7427
1.0000	3.9833
1.1000	4.2812

Örnek 4. $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y}{e^t + 1}$; $y(0) = 1$, $\frac{dy}{dt}(0) = 0$

İkinci mertebe diferansiyel denklemini üç adım için çözünüz.

$h = 0.1$ alınız ve Euler yöntemini kullanınız.

Çözüm:

Diferansiyel denklem ikinci mertebe olduğuna göre iki tane birinci mertebe diferansiyele dönüştürmemiz gerekmektedir.

$\frac{dy}{dt} = u$ ise

$\frac{d^2y}{dt} = \frac{du}{dt}$ elde edilir.

Buna göre

$$\frac{du}{dt} = \frac{y}{e^t + 1}, \quad u(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = u, \quad y(0) = 1$$

$$u_{i+1} = u_i + \left(\frac{y_i}{e^{t_i} + 1}\right) h$$

$$y_{i+1} = y_i + u_i h$$

Euler bağıntılarını kullanarak aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

t	y	u
0.0000	1.0000	0.0000
0.1000	1.0000	0.0500
0.2000	1.0050	0.0977
0.3000	1.0148	0.1434
0.4000	1.0291	0.1872
0.5000	1.0478	0.2293
0.6000	1.0708	0.2697
0.7000	1.0977	0.3086
0.8000	1.1286	0.3460
0.9000	1.1632	0.3821
1.0000	1.2014	0.4168
1.1000	1.2431	0.4503

10-4 RUNGE - KUTTA YÖNTEMİ

Adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde kullanımı en yaygın olan yöntemlerden birisi Runge-Kutta Yöntemi dir.

Runge-Kutta yöntemi, değişik mertebelerden oluşan bağıntılar içerir. Burada, en çok kullanılan ve en etkin olan dördüncü mertebeden Runge-Kutta bağıntıları verilecek ve uygulamaları yapılacaktır. Runge-Kutta tipi bağıntıların belirleyici özellikleri şöyle özetlenebilir:

i) Programlanması basittir.

ii) Kararlılık karakteristikleri olumludur.

iii) Herhangi bir karmaşıklığa neden olmadan adım büyüklükleri isteğe göre değiştirilebilir.

iv) Çözümün başında özel hesaplamaları gerektirmez.

Bunun yanında bu yöntemin belirli olumsuzlukları da vardır. Bunlardan birisi, eş duyarlılıktaki diğer yöntemlere kıyasla daha fazla bilgisayar zamanına gereksinme duymasıdır. Bir başkası ise, yerel hatanın hesaplanmasında belirli güçlükler çıkarmasıdır.

Olumlu yanları, olumsuz yanlarına kıyasla fazla olan Runge-Kutta yöntemi diferansiyel denklemin biçiminden bağımsız olarak, başarı ile uygulanabilir.

Runge-Kutta bağıntılarında kullanılan genel algoritma şöyledir:

$$y_{i+1} = y_i + h\,F(y_i, t_i, h) \tag{46}$$

F, fonksiyonu, "artış fonksiyonu" olarak bilinir. Buna bağlı olarak dördüncü mertebe bağıntıları aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$F(y_i, t_i, h) = ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 \tag{47}$$

olmak üzere,

$$y_{i+1} = y_i + h\,(ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4) \tag{48}$$

genel dördüncü mertebe Runge – Kutta algoritması elde edilir. k_1, k_2, k_3 ve k_4, $t_i \le t \le t_{i+1}$ aralığında hesaplanmış türev değerleridir. Burada,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_i, t_i) \\ k_2 &= f\left(y_i + \frac{1}{2}hk_1, t_i + \frac{1}{2}h\right) \\ k_3 &= f\left(y_i + \frac{1}{2}hk_2, t_i + \frac{1}{2}h\right) \\ k_4 &= f(y_i + hk_3, t_i + h) \end{aligned} \tag{49}$$

ve

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{50}$$

Oldukça verimli sonuçlar veren denklem (49) ve (50) ile belirlenen Runge-Kutta dördüncü mertebe algoritmasına Gill tarafından yapılan bir düzenleme ile aşağıdaki biçimi alır:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_i, t_i) \\ k_2 &= f\left(y_i + hk_1, t_i + \frac{1}{2}h\right) \\ k_3 &= f\left(y_i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_2, t_i + \frac{1}{2}h\right) \\ k_4 &= f\left(y_i - \frac{1}{\sqrt{2}}hk_2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_3, t_i + h\right) \end{aligned} \tag{51}$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2 + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3 + k_4\right) \tag{52}$$

Örnek 5. $\frac{dy}{dt} = (y + t)^2 \quad ; \quad y(0) = -1$

diferansiyel denklemini Runge-Kutta bağıntısı ile bir adım çözünüz. $h = 0.1$ alınız.

$$k_1 = f(t_0, y_0) = (y_0 + t_0)^2 = (-1 + 0)^2 = 1$$

$$k_2 = f\left(y_0 + \frac{1}{2} h k_1, t_0 + \frac{1}{2} h\right) = \left(-1 + \frac{1}{2}(0.1)(1) + 0 + \frac{1}{2}(0.1)\right)^2 = 0.8100$$

$$k_3 = f\left(y_0 + \frac{1}{2} h k_2, t_0 + \frac{1}{2} h\right) = \left(-1 + \frac{1}{2}(0.1)(0.81) + 0 + \frac{1}{2}(0.1)\right)^2 = 0.8272$$

$$k_4 = f(y_0 + hk_3, t_0 + h) = (-1 + 0.1\,(0.8272) + 0 + 0.1)^2 = 0.6679$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_1 = -1 + \left[\frac{0.1}{6}\, 1 + 2\,(0.8100) + 2\,(0.8272) + 0.6679\right] = -0.9176$$

10-4.1 DÖRDÜNCÜ MERTEBE RUNGE-KUTTA YÖNTEMİNDE KESİM HATASI

Genel olarak m. mertebe Runge-Kutta algoritmalarında kesim hatası şöyle ele alınabilir. Taylor açılımına dayanarak bulunan her mertebe Runge-Kutta, bu mertebesini hata mertebesi olarak alınır. O halde yerel kesim hatası

$$E = Kh^{m+1} + 0(h^{m+2}) \tag{53}$$

olarak belirlenebilir. Burada K sabiti, $f(x, y)$ fonksiyonuna ve onun yüksek mertebe türevlerine karmaşık bir biçimde bağlı bir değerdir. Yerel kesim hatasını bulmak için aşağıdaki yolu izleyebiliriz:

y_{n+1} değerine, iki noktadan t_n ve t_{n+1}, hareket ederek, iki farklı adım uzunluğu, h_1 ve h_2, kullanarak varmaya çalışalım. h_1 adım uzunluğu ile $y_{n+1,\,1}$ değerine, h_2 adım uzunluğu ile $y_{n+1,\,2}$ değerine varmış olalım. Y_{n+1} gerçek değer ise, ekstrapolasyon ile bulunacak değerler şöyledir:

$$Y_{n+1} - y_{n+1,\,1} = Kh_1^{m+1} \frac{(t_{n+1} - t_n)}{h_1} \tag{54}$$

$$Y_{n+1} - y_{n+1.2} = Kh_2^{m+1} \frac{(t_{n+1} - t_n)}{h_2} \tag{55}$$

Denklem (54) ve (55) taraf tarafa bölünerek Y_{n+1} için çözülecek olursa şu bağıntı elde edilir.

$$Y_{n+1} = \frac{\left(y_{n+1,1} - y_{n+1,2}(h_1/h_2)^m\right)}{1 - (h_1/h_2)^m} \tag{56}$$

Eğer, $h_1 = 2h_2$ alınacak olursa,

$$Y_{n+1} = \frac{\left(y_{n+1,1} - 2^m y_{n+1,2}\right)}{1 - 2^m} \tag{57}$$

Yerel hata $E = Y_{n+1} - y_{n+1,1}$ veya $E = Y_{n+1} - y_{n+1,2}$ olduğuna göre denklem (54) veya (55) ve (57) kullanılarak yerel kesim hatası için bir tahmin değeri elde edilebilir:

$$E = Kh_1^{m+1} = \frac{2^m\left(y_{n+1,2} - y_{n+1,1}\right)}{2^m - 1} \tag{58}$$

Runge-Kutta dördüncü mertebe algoritmasında $m = 4$ olduğuna göre,

$$E = \frac{16}{15}\left(y_{n+1,2} - y_{n+1,1}\right) \tag{59}$$

bulunur. Burada, yukarıda da açıklanmaya çalışıldığı gibi, t_n değerinden hareket ederek h_1 adımı ile t_{n+1} değerindeki $y_{n+1,1}$ değerini hesapladıktan sonra yine t_n değerinden hareket ederek bu kez $h_2 = h_1/2$ adım uzunluğu ile t_{n+1} değerindeki $y_{n+1,2}$ değerine ulaşarak denklem (59) ile adım başına yapılan kesim hatasına ilişkin tahmini bir değer elde edilebilir.

Örnek 6. $\dfrac{dy}{dt} = 1 - y^2$, $y(0) = 0$

diferansiyel denklemini Runge-Kutta (4) ile çözerek ilk adım için yerel kesim hatasını yaklaşık olarak hesaplayınız. $h = 0.1$ alınız.

Çözüm:

$h_1 = 0.1$ alalım. $f(y, t) = 1 - y^2$ olduğuna göre denklem (49) u kullanarak;

$k_1 = 0.1$

$k_2 = 0.9975$

$k_3 = 0.9975$

$k_4 = 0.9900$

elde edilir. Denklem (50) den yararlanarak

$y_{n+1,1} = y_{1,1} = 0.09966$ bulunur.

Şimdi $h_1 = 0.1$ adım uzunluğu ikiye bölerek $h_2 = 0.05$ alarak y_1 değerine (ya da $y_{1,2}$ değerine) iki adımda ulaşalım.

1. adım : $y_0 = 0$ kullanarak

$k_1 = 1$

$k_2 = 0.9994$

$k_3 = 0.9994$

$k_4 = 0.9975$

ve

$y_{0,ara} = 0.0499$

2. adım : Başlangıç olarak $y_{0,ara} = 0.0499$ değerini kullanarak,

$k_1 = 0.9975$

$k_2 = 0.9944$

$k_3 = 0.9944$

$k_4 = 0.9900$

ve

$y_{n+1,2} = y_{1,2} = 0.09961$ elde edilir.

Denklem (59) kullanılarak $y_0 = 0$ değerinden $h = 0,1$ ile y_1 değerine ulaşırken yapılan yerel kesim hatasını bulabiliriz:

$$E = \frac{16}{15}\ (0.09961 - 0.009966)$$

$$E = -0.0000533 = -5.33 \times 10^{-5}$$

Buna göre oldukça küçük bir kesim hatası bulunduğunu ve Runge-Kutta (4) yönteminin etkinliği görülmüş olmaktadır.

Örnek 7. 1 m. çapında ve 2 m. uzunluğunda yükseltilmiş bir tank 4 cm. kalınlığında asbest ile izole edilmiş bulunmaktadır. Bu tank kesikli bir kimyasal proseste dinlendirme aracı olarak kullanılmaktadır. Tank 95°C sıcaklığındaki proses akışkanı ile doldurulmuş ve sıvı, 5 gün süre ile dinlendirilmeye bırakılmıştır. Aşağıdaki verilerden yararlanarak sıvının sıcaklık değişimini ve son sıcaklığını hesaplayınız.

Çap D, uzunluk L, tank hacmi V, ile gösterilebilir.

Veriler:

Sıvı film ısı transfer katsayısı (h1): 150 W/m2°C

Asbestin ısıl iletkenliği (k): 0.2 W/m°C

Konveksiyon ve radyosiyon ile yüzey ısı transfer

katsayısı (h2): 10 W/m2°C

Sıvı yoğunluğu (r): 1000 kg/m3

Sıvı ısı kapasitesi (s): 2500 J/kg°C

Atmosfer sıcaklığının (TA) zamanla (t) şu şekilde değiştiğini varsayalım. Zaman, saat olarak geçerlidir:

$$TA = 10 + 10 \cos(\pi t/12) \qquad (I)$$

Doldurma sırasında atmosfer sıcaklığı 20°C'dir. Desteklerden ısı kaybı ihmal edilmektedir.

Çözüm:

Tank yüzey alanı, A, sıvı, tank dış duvar ve izolasyon dış yüzey sıcaklıkları sırası ile T, TW, ve TS ise olayı belirleyen model şöyle elde edilebilir.

$$A = DL + 2(\pi D^2/4) = (\pi)(1)(2) + (2)(\pi)(1)/4 = 7.85\ m^2$$

Q1 = Sıvıdan ısı kayıp hızı = h1(A) (T – TW) Watt

Q2 = İzolasyondan iletimle ısı kayıp hızı = k (A/L) (TW – TS) Watt

Q3 = izolasyon yüzeyinden ısı kayıp hızı = h^2 (A) (TS – TA) Watt

Isı korunacağına göre,

Q1 = Q2 = Q3

bağıntısı geçerlidir. O halde,

$$h1\ (A)\ (T - TW) = k\ (A/L)\ (TW - TS) = h^2\ (A)\ (TS - TA)$$

bağıntısı kullanılarak sayısal olarak bilinen değerler yerine konulacak olursa aşağıdaki ilişki elde edilir.

$$TS = 0.326\ T + 0.674\ TA \qquad (II)$$

Tanktaki sıvı sistem olarak ele alınarak ısı denkliği kurulabilir.

Giren ısı hızı = 0

Çıkan ısı hızı = h2 (A) (TS – TA) Watt

Biriken ısı = V(r) (s) (dT/dt) Watt

Buna göre,

$$-h2(A)\ (TS - TA) = V\ (r)\ (s)\ (dT/dt)$$

eşitliğinden hareket ederek ve verili değişkenlerin yerine değerleri yazılarak şu bağıntı bulunur.

$$dT/dt = -0.072\ (0.326\ T + 0.674\ TA - TA) \qquad (III)$$

(I), (II) ve (III) bağıntıları birleştirilerek tanktaki sıvı sıcaklığının zamana göre değişimi elde edilir.

$$dT/dt = 0.235 + 0.235 \cos(\pi\ t/12) - 0.0235\ T$$

Başlangıç koşulu : t = 0 da T = 95°C

Adım uzunluğu, h = 0.1 olarak alınırsa 5 günlük süre olan 120 saat sonundaki sıcaklık değeri ve sıcaklık değişimi Runge-Kutta ve Euler yöntemleri ile kıyaslamalı olarak şöyle elde edilir.

	Euler	Rung-Kutta
t (saat)	T (°C)	T (°C)
0	95.00	95.00
10	77.51	77.51
20	62.31	62.34
30	52.82	52.85
40	42.33	42.36
50	36.70	36.74
60	30.63	30.65
70	25.97	26.01
80	23.67	23.69
90	19.33	19.35
100	18.88	18.91
110	15.88	15.89
120	15.11	15.14

10-5 SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümün başında da belirtildiği gibi sınır değer probleminde koşullar, bağımsız değişkenin birden fazla değeri için tanımlanır. Burada, sınır koşulları bağımsız değişkenin iki farklı değeri için belirlenmiş sınır değer problemi üzerinde durulacaktır. Gerek tek denklem gerekse denklem sistemleri biçiminde karşımıza çıkan iki bağımsız değişkenli ikinci mertebe sınır değer problemlerinde sınır koşulları bağımsız değişkenin farklı iki değerinde tanımlı olması gerekmektedir.

İkinci mertebe bir sınır değer probleminin sayısal çözümünü inceleyebilmek için örnek bir modeli temel almak yararlı olacaktır.

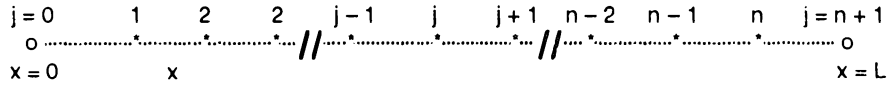
$$\frac{d^2y}{dx^2} + Ay = B \tag{60}$$

sınır koşulları: $y(0) = D1$ ve $y(L) = D2$

Sayısal çözüm için genel olarak iki belirgin yaklaşımdan söz etmek mümkündür. Bunlardan biri matris yöntemleri, diğeri ise atış yöntemleridir. Şimdi bu yöntemlerin ilkelerini biraz daha ayrıntılı ele alalım.

10-5.1 MATRİS YÖNTEMLERİ

İkinci mertebe bir sınır değer problemini temel alarak bir örnek üzerinde matris yöntemini incelemeye çalışalım. Örnek problem denklem (60) ile belirtilen model olsun. Sınırların belirlediği aralığı $0 < x < L$, uzunluğu Δx olan $n + 1$ eşit parçaya bölelim. Diferansiyel denklemi sonlu fark denklemine dönüştürerek aşağıdaki şekilde görülen her bir nokta için çözüm elde edilir.



Diferansiyel denklemin ikinci türev terimi yerine merkezi fark karşılığını j noktasını temel alarak yazacak olursak aşağıdaki sonlu fark denklemi elde edilir.

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{(\Delta x)^2} + Ay_j = B \tag{61}$$

Denklem (61) ele alınarak $j = 1, 2, \ldots, n$ değerleri için n tane doğrusal denklem elde edilir. n tane ara noktada fonksiyon değerleri bilinmemektedir. $j = 0$ ve $j = n + 1$ olarak belirtilen uç (sınır) noktalarında ise fonksiyon değerleri bilinmektedir. n tane ara nokta birbirinden bağımsız olduğu için elde edilen n tane doğrusal denklem bağımsız bir küme oluşturur.

$$
\begin{aligned}
&y_2 - 2y_1 + (D1) + A(\Delta x)^2 y_1 = B(\Delta x)^2 \\
&y_3 - 2y_2 + y_1 + A(\Delta x)^2 y_2 = B(\Delta x)^2 \\
&\quad\vdots \\
&y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} + A(\Delta x)^2 y_{n-1} = B(\Delta x)^2 \\
&(D2) - 2y_n + y_{n-1} + A(\Delta x)^2 y_n = B(\Delta x)^2
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Denklem sistemini matris notasyonu ile şöyle elde edebiliriz.

$$My = q \tag{63}$$

$$
M = \begin{bmatrix}
a & 1 & & & & & \\
1 & a & 1 & & & & \\
 & 1 & a & 1 & & & \\
 & & - & - & - & & \\
 & & & - & - & - & \\
 & & & & 1 & a & 1 \\
 & & & & & 1 & a
\end{bmatrix}
$$

$$a = -2 + A(\Delta x)^2$$

$$y = (y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n)^T$$

$$q = (B(\Delta x)^2, B(\Delta x)^2, \ldots\ldots\ldots\ldots, B(\Delta x)^2)^T$$

M, üç köşegenli bir matristir. Bu durum dolayısı ile $My = q$ denklem sistemi, Gauss elemesinin özel bir uygulaması olan Thomas algoritması kullanılarak çözülebilir. Rekürans bağıntılarının çözümüne dayalı olan ve ters matris hesabı ile matris çarpımlarını gerektirmeyen Thomas algoritması, herhangi bir nümerik analiz kitabında bulunabileceği için burada ayrıntısına girilmeyecektir. Matris yönteminin en belirgin avantajı, kolaylığıdır. Ancak, diferansiyel denklem doğrusal olmayan terimler içerdiği takdirde oluşan denklem sistemi artık doğrusal değildir. Bu bakımdan elde edilen doğrusal olmayan denklem sisteminin çözümü iteratif yöntemleri gerektirir ve belirli güçlüklerin ortaya çıkma olasılığı artar.

Örnek 8. Aşağıdaki sınır değer problemini matris yöntemini kullanarak çözünüz.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{4} = 8$$

Sınır koşulları: $y(0) = 0$ ve $y(10) = 0$

$\Delta x = 1$ alarak $0 \le x \le 10$ aralığını 10 eşit parçaya bölebiliriz.

$a = -2 + (1/4)^2 (1) = -1.75$ ve q vektöründeki tüm elemanlar

$8(1)^2 = 8$ değerindedir.

Buna göre denklem (62) den yararlanıp aşağıdaki denklem sistemini elde edebiliriz.

$$\begin{bmatrix} -1.75 & 1 & & & & & & & \\ 1 & -1.75 & 1 & & & & & & \\ & 1 & -1.75 & & & & & & \\ & & - & - & - & & & & \\ & & & - & - & & & & \\ & & & 1 & -1.75 & 1 & & & \\ & & & & 1 & -1.75 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ - \\ - \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \\ - \\ - \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Denklem sisteminin çözümü ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir. Çözüm simetrik olduğu için ilk 5 değeri analitik sonuçlarla birlikte verilmiştir.

Analitik Çözümü:

$$y = 32\left(\frac{\cos(5)-1}{\sin(5)}\sin(x/2) - \cos(x/2) + 1\right)$$

x	Matris Yöntemi	Analitik
0	0	0
1	14.9384	15.3779
2	34.1422	34.8254
3	52.8105	53.5812
4	66.2761	67.0532
5	71.1173	71.9429

Çözümün duyarlılığı, Δx değerinin küçültülmesi ile artırılabilir.

10-5.2 ATIŞ YÖNTEMİ

Atış yönteminin yaklaşımı, sınır değer probleminin başlangıç değer problemine dönüştürülmesine dayanır. Denklem (60) ile belirlenen örnek problemi ele alalım. Bu problem, başlangıç değer problemi biçimine aşağıdaki gibi indirgenebilir.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Ay = B \qquad (64)$$

Başlangıç koşulları: $y(0) = D1$ ve $\frac{dy}{dx}(0) = u$

Burada u bilinmeyendir ve öyle bir şekilde seçilmelidir ki $y(L) = D2$ olsun. O halde u için bir başlangıç değeri kabul ederek uygun bir sayısal yöntemle yakınsama sağlanabildiği takdirde başlangıç değer probleminin alternatif olarak çözümü ile sınır değer problemi sonuçlandırılmış olur. Belirli bir toleransta u ile $y(L)$ değerleri birbirlerine yaklaşabilmişlerse sınır değer problemi çözülebilmiş demektir.

Denklem (64) ile belirtilen başlangıç değer problemini "kiriş yöntemi" ile yakınsatabiliriz. u için iki başlangıç değeri gereklidir. Bunlar uo ve uoo olsun. uo ile uoo arasındaki fark küçüktür. Şimdi algoritmayı adım adım izleyelim:

i) uo ve uoo değerlerini varsayalım.

ii) uo değerini alarak başlangıç değer problemini $x = L$ değerine kadar çözelim. Bu noktada fonksiyonun alacağı değeri $y(L) = to$ ile gösterelim.

iii) Aynı işlemi uoo değeri ile yineleyerek $x = L$ de bulunan fonksiyon değeri too olsun.

iv) Kiriş yöntemine göre yeni u değeri aşağıdaki bağıntı ile bulunabilir.

$$DEL = \frac{(uoo - uo)}{(too - to)}\ too \tag{65}$$

$$u = uoo - DEL \tag{66}$$

v) Eğer mutlak DEL değeri bir epsilon değerinden (örneğin 1.0 E – 0.8) ise $x = L$ de bulunan fonksiyon değeri $D2$ sınır değerine yeteri kadar yaklaşmış ve yakınsama sağlanmış demektir.

vi) Adım *(v)* teki koşul sağlanmadığı takdirde iteratif işleme devam edilir.

uo = uoo

to = too

uoo = u

atamaları yapılır ve bu yeni değerlerle başlangıç değer problemi çözülerek yeni too değeri elde edilir.

vii) Adım *(iv)* e gidilerek işlem sürdürülür.

Yukarıda anlatılan algoritmadaki başlangıç değer probleminin çözümü herhangi bir sayısal yöntem (Euler, Runge-Kutta gibi) kullanılarak gerçekleştirilebilir.

Örnek 9. Aşağıdaki sınır değer problemini atış yöntemini kullanarak çözünüz.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{4} = 8$$

Sınır koşulları: $y(0) = 0$ ve $y(10) = 0$

Öncelikle sınır değer problemini eşdeğer başlangıç değer problemine dönüştürmek gerekmektedir.

$$\frac{dy}{dx} = z, \qquad y(0) = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = 8 - (1/4)y, \qquad z(0) = u$$

u bilinmeyendir ve öyle bir şekilde saptanmalıdır ki $y(10) = 0$ olsun. Başlangıç değer problemini $\Delta x = 0.1$ alarak Runge-Kutta ile çözelim.

uo = 10 alınırsa to = 3.74517 bulunur.

uoo = 11 alınırsa too = 1.82730 elde edilir.

$$DEL = \frac{11 - 10}{1.82730 - 3.74517}\ 1.82730 = -0.95277$$

u = 11 – (–0.95277) = 11.95277

Bu değeri kullanarak başlangıç değer problemi tekrar çözülürse,

too = 5.72205 E – 05 bulunur.

y(0) = too = 5.72205 E – 05

sıfıra oldukça yakın bir değerle problem çözülmüş olur. Buna göre, sınır değer probleminin çözümü aşağıdaki şekildedir.

x	y
0	0
1	15.3783
2	34.8260
3	53.5817
4	67.0535
5	71.9429
6	67.0530
7	53.5809
8	34.8250
9	15.3776
10	0.000057

ikinci mertebeden yüksek sınır değer problemleri için benzer yaklaşımlar kullanılabilir.

10-6 SAYISAL YÖNTEMLERDE KARARLILIK

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde, gerek kesim hataları gerekse yuvarlama hataları ihmal edilebilecek kadar küçük olmasına rağmen, kararsız durumlarla karşılaşılabilir. Kararsızlık halinde $[\, y(t_{n+1}) - y_{n+1} \,]$ hatası, çözüm adımlarının sayısı arttıkça sınırsız bir değere doğru gider. Burada kullanılan $y(t_{n+1})$ ve y_{n+1} sembolleri, sırası ile t_{n+1} bağımsız değişken değerinde, gerçek ve hesaplanan fonksiyon değerlerini belirtmektedir.

Kararsızlık koşullarının nedeni, diferansiyel denklemlerin sayısal olarak çözülmesinde, fark denklemleri ile yaklaştırılmalarıdır. Sayısal yöntemler, $C\mu^n$ şeklinde bir çözümü olan fark denklemlerinden meydana gelirler. Burada C herhangibir sabit, n çözüm adım sayısı ve μ, indirgenmiş denklemin köküdür. Sayısal yöntemler, genel olarak, $Ce^{\mu t}$ şeklinde çözümleri olan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılır.

Bu bölümde kararsızlık durumunu örneklendirmek amacı ile birinci mertebe fark denklemleri ile karakterize edilen sayısal çözümleri ele alalım. Euler yöntemini ele alacak olursak iterasiyon bağıntısını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n \tag{67}$$

Denklem (67), denklem (68) ile belirtilen sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemin sayısal çözümünde kullanılabilir.

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y \tag{68}$$

Denklem (68) ile belirtilen diferansiyel denklemin analitik çözümü şöyledir,

$$y(t) = y(0)e^{\lambda t} \tag{69}$$

$y(0)$ sonlu olmak üzere, $\lambda < 0$ için,

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

olmalıdır. Buna göre denklem (68) Euler yöntemine dayanarak entegre edilirse aşağıdaki şekilde bir sonlu fark denklemine ulaşılır. Denklem (68) den,

$$\frac{dy}{y} = \lambda dt$$

Buradan,

$$\ln y - \ln C = \lambda t$$

veya

$$y = Ce^{\lambda t}$$

ve türevi alınarak

$$y' = C\lambda e^{\lambda t}$$

elde edilir. Bu sonuçlar Euler rekürans bağıntısında yerine konularak sonlu fark denklemine ulaşılır.

$$y_{n+1} - (1 + h\lambda)y_n = 0 \tag{70}$$

Denklem (70) ile ifade edilen sonlu fark denkleminin çözümünden,

$$y_n = C\,(1 + h\lambda)^n \tag{71}$$

elde edilir. Denklem (71) de n değerinin sınırsız artması ile çözümünde de sınırsız artması söz konusu olduğu için aşağıdaki limit sağlanmalıdır.

$$\lim_{t \to \infty} y_n = 0 \tag{72}$$

Limiti sağlamak için de $|1 + \lambda h| < 1$ olmalıdır. Buna göre adım uzunluğu, h, sıfırdan büyük olduğundan, λ değeri sıfırdan küçük olmalıdır, $\lambda < 0$. O halde kararlılık koşulu aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

$$|h\lambda| < 2$$

Ayrıntısına girmeden Runge-Kutta yönteminin (4. mertebe) kararlılık koşulunu vermekte yarar olacaktır.

$$|h\lambda| < 2.78 \tag{73a}$$

Sonlu ve genel bir kararlılık sınırına sahip olan yöntemler, koşullu kararlı olarak bilinir. Genel olarak Euler ve Runge-Kutta tipi yöntemler, koşullu kararlıdır. Fakat bu yöntemlerin bir dezavantajı, kararlılık için bazı durumlarda adım uzunluğunun çok küçük olması gerektiğidir. Bu koşullarda çözüm hesaplama açısından ekonomik olmayabilir.

10-7 STIFF DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Stiff diferansiyel denklemler kavramı genel olarak birinci mertebe diferansiyel denklem sistemleri ile izah edilmeye çalışılsa da burada öncelikle tek diferansiyel denklem konumunda ele alınmaya çalışılacaktır. Daha sonra denklem sistemlerindeki durum incelenerek konu, örneklerle ele alınacaktır.

Stiff diferansiyel denklemler genel olarak sayısal çözümlerde kararsızlık gösterirler. Bu bakımdan kararlılık koşullarını sağlayan adım uzunluklarını kullanmak gerekir. Bu durum, özellikle Euler ve Runge-Kutta gibi eksplisit yöntemlerde ortaya çıkar. Kararlılık koşulunu sağlamayan adım uzunluğu ıraksak çözümlere neden olur.

Şimdi, bir örnek problem ele alarak incelememize başlayalım.

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t) = 100\,(\sin t - y)\,; \qquad y(0) = 0 \tag{74}$$

Çözümü Euler yöntemi ile gerçekleştirelim. Kararlılık koşulu, $|h\lambda| < 2$ idi. Burada λ, $f(t, y)$ fonksiyonunun başlangıç koşulunda hesaplanmış y değişkenine göre kısmi türevidir.

$$\lambda = \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \qquad \text{(Başlangıç koşulu)} \tag{75}$$

Stiff olabilme koşulu, tek diferansiyel denklem durumunda λ değerinin sıfırdan küçük olması gerektiğidir.

Problemde, $\lambda = -100$, ve dolayısı ile $|100\,h| < 2$ olmalıdır. O halde, $h < 0.02$ alınarak kararlı bir çözüme ulaşmak mümkündür. Çözümü önce $h = 0.03$ için sonra $h = 0.015$ için yapacak olursak, kararlılık sınırının üstünde olan 0.03 değerinde çözümün ıraksadığını, kararlılık sınırının altında olan 0.015 değerinde ise makul bir çözüm bulduğunu görebiliriz. Aşağıdaki, Euler yöntemi ile yapılan çözümlerin bazı adımlarındaki sonuçlar verilmiştir.

h = 0.03

t	y
0.0000	0.0000
0.5100	-1.3103×10^{3}
1.0500	-3.4361×10^{8}
2.0100	-1.4758×10^{18}
3.0000	1.2677×10^{28}

Dikkat edilecek olursa çözüm sınırsız olarak büyümektedir. Başka bir deyişle, kararlılık koşulunu sağlayan bir adım değeri kullanılmadığı için ıraksamıştır. Şimdi $h < 0.02$ olmak üzere bir adım uzunluğu ile çözümü gerçekleştirelim.

h = 0.015

t	y
0.0000	0.0000
0.5100	0.4794
1.0500	0.0947
2.0100	0.9093
3.0000	0.1510

Görüldüğü gibi $h = 0.015$ alındığı takdirde çözüme ulaşırken, $h = 0.03$ alındığı zaman çözüm ıraksamaktadır.

Bu noktada diferansiyel denklem sistemleri konumunda stiff olma özelliği incelenebilir. n tane denklemden oluşan aşağıdaki sistemi göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\
\frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, \ldots, y_n) \\
&\vdots \\
\frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, \ldots, y_n)
\end{aligned} \tag{76}$$

Denklem (76) da belirtilen sistemde yer alan tüm fonksiyonların, $f_1, \ldots, f_n$ bağımlı değişkenlere, $y_1, \ldots, y_n$, göre kısmi türevlerini kapsayan matrisi oluşturalım.

$$J = \begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\
\frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}
\end{vmatrix} \tag{77}$$

Denklem (76) da tanımlanan J matrisi, diferansiyel denklem sisteminin Jacobian matrisi olarak bilinir. Buna göre kanıtlamaya girmeden bu sismetin stiff olma koşullarını verelim:

1° $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0.k = 1, \ldots, n$

Jacobian matrisin tüm özdeğerlerinin (λ), gerçek değerleri sıfırdan küçük olmalıdır. Dolayısı ile Jacobian matris oluşturularak bunun özdeğerlerinin bulunması gerekmektedir.

2° $\max_{1 \le k \le n} |\mathrm{Re}\lambda_k| >>> \min_{1 \le k \le n} |\mathrm{Re}\,\lambda_k|$

Jacobian matriste, en büyük özdeğerin gerçel kısmının mutlak değeri, en küçük özdeğerin gerçel kısmının mutlak değerinden belirgin bir şekilde büyük olmalıdır.

Stiff olma oranı (rs), aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$rs = \frac{\max\limits_{1 \le k \le n} |Re\ \lambda_k|}{\min\limits_{1 \le k \le n} |Re\ \lambda_k|} \tag{78}$$

Buna göre, birinci mertebe diferansiyel denklem sistemlerinde kararlılık koşulu, Jacobian matrisin spektral yarıçapına bağlı olarak bulunabilir.

Spektral yarıçap, *r(J)*, bir matrisin mutlak değer olarak en büyük özdeğeridir. Euler yöntemine göre kararlılık koşulu ise şu şekildedir.

$$|h\ r(J)| < 2 \tag{79}$$

Birinci mertebe diferansiyel denklem sistemlerinin Runge-Kutta yöntemi (4. mertebe) ile çözümünde kararlılık koşulu aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$|h\ r(J)| < 2.78 \tag{79a}$$

Bir diferansiyel denklemin ya da denklem sisteminin stiff olma oranı her bir iterasyon adımında değişebilir. Çünkü sistemin Jacobian matrisi, her iterasyon adımında değişecektir. Bu konuda yaptığımız incelemede yalnız başlangıç koşulundaki değerler göz önüne alınarak örneklemeler gerçekleştirilmiştir.

Örnek 10. Aşağıda diferansiyel denklem sistemini, stiff olma özelliğini de inceleyerek çözünüz ve $y_1(100)$ ve $y_2(100)$ değerlerini bulunuz.

$$\frac{dy_1}{dt} = 0.01 - (0.01 + y_1 + y_2)\,[1 + (y_1 + 1000)\,(y_1 + 1)]$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 0.01 - (0.01 + y_1 + y_2)\,(1 + y_2^2)$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0$$

Bu örnek kimyasal reaksiyon modelinin kinetiğinden elde edilmiştir. Bu problemin analitik çözümü olanaksızdır. Bu bakımdan sayısal çözüme başvurmak zorundayız. Örnek olarak dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemini kullanabiliriz.

Jacobian matrisi oluşturmak üzere, fonksiyonellerin y_1 ve y_2 ye göre kısmi türevlerini alalım.

$$f_1 = 0.01 - (0.01 + y_1 + y_2)\,[1 + (y_1 + 1000)\,(y_1 + 1)]$$

$$f_2 = 0.01 - (0.01 + y_1 + y_2)\,(1 + y_2^2)$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = -\{[1 + (y_1 + 1000)(y_1 + 1)] + (0.01 + y_1 + y_2)(2y_1 + 1001)\}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = -[1 + (y_1 + 1000)(y_1 + 1)]$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_1} = -(1 + y_2^2)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -[(1 + y_2^2) + (0.01 + y_1 + y_2)(2y_2)]$$

Buna göre sistemin başlangıç koşullarında Jacobian matrisi şöyledir.

$$J = \begin{vmatrix} -1011.01 & -1001 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Jacobian matrisin başlangıç koşullarında özdeğerleri, −1012 ve −0.01 dir. Her ikisi de negatif olduğuna göre stiff olmanın birinci koşulunu sağlamaktadır. Stiff olma oranı ise 101200 dir. Runge-Kutta yöntemini uygulamak için kararlılık koşulundan (denklem (79a)) adım uzunluğunun büyüklüğü bulunabilir. Jacobian matrisin spektral yarıçapı, r(J) = 1012 dir.

Buna göre,

$h < 278/1012 = 0.002747$

olmalıdır. Buna göre çözüm bulabilmek için adım uzunluğunun değeri, 0.002747 den küçük olmalıdır. Runge-Kutta uygulanarak değişik adım uzunlukları için bulunan değerler aşağıda verilmiştir.

h	$y_1(100)$	$y_2(100)$
0.0025	−0.9916	−0.9833
0.0020	−0.9916	−0.9833
0.0010	−0.9916	−0.9833

Değişik fakat kararlılık koşulunu sağlayan adım uzunlukları için çözüm istikrarlı bir şekilde elde edilmiştir.

10-8 İKİ NOKTALI KAPALI ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Euler ve Runge-Kutta gibi açık (explicit) yöntemler, stiff olma oranı oldukça yüksek olan diferansiyel denklem ve denklem sistemlerinde adım uzunluğu, kararlılık koşulunu sağlamadıkça ıraksamaktadır. Bu durumda, adım uzunluğu çok küçük olmakta ve çözüm açısından ekonomik olmayan bir yol izlenmektedir. Buna karşılık kapalı (implicit) yöntemler, stiff diferansiyel denklemler için daha uygundur. Çünkü genel olarak stiff karakterden etkilenmezler. Bu konuda kapalı yöntemlere ayrıntılı olarak girilmeyecektir. Sadece, örneklemek ve bir yol göstermek açısından iki noktalı kapalı yöntem üzerinde kısaca durulacaktır.

İki noktalı kapalı yöntemi izah etmek üzere aşağıdaki birinci mertebe diferansiyel denklemi alalım.

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Bu yöntemde, sayısal çözümün yeni iterasiyon adımındaki y değeri, y_{n+1}, bağımsız değişkenin ardışık iki değerinden, t_n ve t_{n+1} yararlanarak bulunur. Ağırlık faktörü, 0 olmak üzere, rekürans bağıntısı şöyle belirtilebilir.

$$[\phi f(t_{n+1}, y_{n+1}) + (1-\phi) f(t_n, y_n)]\, h = y_{n+1} - y_n \qquad (80)$$

Burada, $0 \le \phi \le 1$ aralığı söz konusudur. Dikkat edilecek olursa, eğer $\phi = 0$ alınırsa iki noktalı kapalı yöntem, Euler yöntemine indirgenmiş olur. ϕ değerinin seçimi problemin yapısına göre değişebilir. Dolayısı ile ϕ nin bir optimal değerini genellemek mümkün değildir. Ancak diferansiyel denklem ya da denklem sistemine göre değişebilen optimal bir değerden söz edilebilir. Bu da hesaplama tecrübesi ile çözülmekte olan problem için elde edilebilir.

Örnek 11. $\dfrac{dy}{dt} = 1.8 - 2y\,; \quad y(0) = 0.1$

diferansiyel denklemini, $y = 1$ değerine kadar, iki noktalı kapalı yöntemle çözünüz.

Bu örnekte $\phi = 0.6$ ve $h = 0.2$ alalım. Buna göre denklem (80), ilk iterasiyon adımında aşağıdaki şekli alır.

$$[0.6\,(1.8 - 2y_1) + (1 - 0.6)\,(1.8 - 2y_0)]\,(0.2) = y_1 - y_0$$

Başlangıç değeri olarak, $y_0 = 0.1$ bilindiğine göre, kapalı denklem y_1 cinsinden bir bağıntı olarak karşımıza çıkar. Bu denklem çözülerek, ikinci iterasyon adımındaki y değeri olan $y_1 = 0.3581$ bulunur. Diğer iterasyon adımları için bulunan değerler aşağıda verilmiştir.

t	y
0.0000	0.1000
0.2000	0.3581
0.4000	0.5329
0.6000	0.6513
0.8000	0.7315
1.0000	0.7859

Şimdi ise Euler Yöntemi ile Stiff karakterinden dolayı $h = 0.03$ adım değeri ile ıraksayan ve yukarıda verilen örnek problemi iki noktalı kapalı yöntemle çözmeye çalışalım.

Örnek 12. $\frac{dy}{dt} = 100 (\sin t - y); \quad y(0) = 0$

diferansiyel denklemini h = 0.03 alarak iki noktalı kapalı yöntemle çözünüz.

Yukarıda da gösterildiği gibi Euler yöntemi ile $h = 0.03$ alınarak yapılan çözüm ıraksamaktadır.

h = 0.03 (Euler yöntemi ile)

t	y
0.0000	0.0000
0.5100	-1.3103×10^{3}
1.0500	-3.4361×10^{8}
2.0100	-1.4758×10^{18}
3.0000	1.2677×10^{28}

h = 0.03 (İki noktalı kapalı yöntem ile ve $\phi = 0.25$ alınarak)

t	y
0.0000	0.0000
0.5100	0.4794
1.0500	0.8624
2.0100	0.9093
3.0000	0.1510

Görüldüğü gibi aynı adım uzunluğu için Euler ıraksarken kapalı yöntem çözüm bulabilmiştir. Euler yöntemi ile ise kararlılık koşulundan hareketle, 0.02 den küçük adım değerleri için çözüm bulunabilmiştir.

Örnek 13. $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} - \frac{y}{x} - 20y^2$; $y(1) = 1$

diferansiyel denkleminin kararlılık analizini yaparak çözümünü irdeleyiniz. Burada,

$$f(t, y) = \frac{1}{t} - \frac{y}{x} - 20y^2$$

şeklindedir. Eğer *f(t, y)* fonksiyonunun *y* değişkenine göre kısmi türevini alırsak ve bunu başlangıç koşulunda hesaplarsak kararlılık durumunda adım uzunluğunun alabileceği değerleri bulmuş oluruz.

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \left| -\frac{1}{x} - 40y \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 41$$

$h < 2/41 = 0.0488$

O halde diferansiyel denklemi Euler ile çözecek olursak adım uzunluğunun 0.0488 den küçük olması gerekmektedir. Aşağıda Euler ile çözüm bulunmayan ya da ıraksayan durumu iki noktalı kapalı yöntem ile çözerek ve Euler ile kararlılık koşulunda çözüme ulaşarak örnek diferansiyel denklemin davranışı verilmiştir.

$h = .075 > 0.0488$ (Euler yöntemi ile)

t	y
1.0000	1.0000
1.3000	−4.9699
1.6000	-1.6521×10^{14}
1.7500	-2.5143×10^{57}

$h = .075 > 0.0488$ (İki noktalı kapalı yöntemle, $\phi = 0.5$)

t	y
1.0000	1.0000
1.3000	0.1901
1.6000	0.1691
1.7500	0.1618

$h = .0475 < 0.0488$ (Euler yöntemi ile)

t	y
1.0000	1.0000
1.3300	0.1714
1.6175	0.1669
1.7600	0.1609

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki başlangıç değer problemini $\Delta t = 0.1$ ve 0.001 alarak $t(son) = 1$ değerine kadar çözünüz.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

$$y(0) = 2 \, , \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

Yanıt: Euler ile $t = 1$ de $y = 0.1853$ $(\Delta t = 0.1)$

Euler ile $t = 1$ de $y = 0.3000$ $(\Delta t = 0.001)$

Runge-Kutta ile $t = 1$ de $y = 0.3011$ $(\Delta t = 0.1)$

2. Aşağıdaki başlangıç değer problemini Runge-Kutta yöntemi için uygun adım uzunluğunu saptayarak çözünüz. $0 < t < 4$ alınız.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ty = 0$$

$$y(0) = 1 \, , \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

Yanıt: $t = 4$ te $y = 0.1739$ $(\Delta t = 0.8)$

$t = 4$ te $y = 0.2199$ $(\Delta t = 0.1)$

3. $$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{d^2y}{dt^2} - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 3y = 10 \sin(6t)$$

$$y(0) = 0 \, , \frac{dy}{dt}(0) = 0 \, , \frac{d^2y}{dt^2}(0) = 0$$

şeklindeki başlangıç değer problemini $0 < t < 4$ aralığında çözünüz.

4. Aşağıdaki sınır değer problemini çiziniz.

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$$

$$y(1) = 1 \ , \ y(8) = 0$$

Yanıt: $x = 2.0$ de $y = -0.2402$

$x = 5.0$ de $y = -0.08475$

5. Aşağıdaki diferansiyel denklemi, $h = 0.1$ alarak Euler ve iki noktalı kapalı yöntemle, $0.5 < t < 1$ aralığında çözünüz.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\ln(1/t) + y}{t} \ ; \ y(0.5) = 1$$

Yanıt: $t = 0.6 \quad y = 1.3386$

$t = 1.0 \quad y = 2.4591$

İki nokta $(\phi = 0.5)$: $t = 0.6 \quad y = 1.3221$

$t = 1.0 \quad y = 2.3901$

6. $\frac{dy}{dt} = (1 + t + y)^2 \ ; \quad y(0) = 1$

Diferansiyel denklemini Euler yöntemi ve iki nokta kapalı yöntemle çözünüz. Çözümleri $h = 0.05$ ve $h = 0.01$ alarak $y(.15)$ değerini hesaplayarak kıyaslayınız.

Yanıt:

	y(0.15)	
	Euler	İki nokta
h = 0.05:	1.7790	1.9462
h = 0.01:	1.8961	1.9335

Kapalı Yöntem, Euler yöntemine kıyasla daha kararlıdır.

7. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri, uygun adım uzunluğu bularak Euler ile çözünüz.

a) $\frac{dy}{dt} = 10 + \frac{5y(1+2t)}{(1+t)^2}$; $y(.5) = 14.2$

Yanıt: $h = 0.1$ $y(1) = 91.7236$; Kararlı

$h = 0.05$ $y(1) = 105.4987$; Kararlı, daha duyarlı

b) $\frac{dy}{dt} = -1.2y$; $y(0) = 1$

Yanıt: $h = 2$ $y(4) = 1.96$; Kararsız

$h = 1$ $y(4) = 0.0016$; Kararlı

$h = 0.2$ $y(4) = 0.00601$; Kararlı, daha duyarlı

8. Seyreltilmiş oksijen ve ozon gazlarının verdiği kimyasal reaksiyonun kinetiği aşağıdaki birinci mertebe diferansiyel denklem sistemi ile belirlenmektedir.

$$\frac{dx}{dt} = -x - xy + 0.03061225\,y \; ; \quad x(0) = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = 98\,(x - xy - 0.03061225\,y) \; ; \quad y(0) = 0$$

Bu sistemin spektral yarıçapını hesaplayarak kararlılık durumundaki adım uzunluğunu bulunuz.

Yanıt: $r(J) = 100.4$

Stiff olma oranı = 51.22

$h < 0.01992$ (Euler)

$h < 0.02768$ (Runge-Kutta-4)

BÖLÜM
11

Kısmi Diferansiyel Denklemler

11-1 GİRİŞ

Bundan önceki bölümlerde adi diferansiyel denklemler ve çözümleri incelenmiştir. Bu bölümde ise, daha çok fizik ve mühendislik uygulamalarında karşılaşılan kısmi diferansiyel denklemler ele alınacaktır.

Bir diferansiyel denklemde bağımsız değişken sayısının iki veya daha fazla olması ve bu durumda denklemin herhangi mertebeden en az bir kısmi türev içermesi durumunda bu denkleme **"Kısmi Diferansiyel Denklem"** denildiğini biliyoruz. Hemen ifade edelim ki, fizik, kimya, ekonomi ve mühendisliğin pek çok dalında olayların incelenmesinde bu tür denklemler önemli bir yer tutmaktadır.

Genel olarak bir kısmi diferansiyel denklem, $x, y, \ldots$ 'ler bağımsız değişkenler ve $u(x, y, \ldots)$ bağlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) olmak üzere,

$$F\,(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots) = 0 \qquad (1)$$

şeklinde yazılır. Burada $u_x, u_y, u_{xx}, \ldots$ bilinmeyen fonksiyonunun bağımsız değişkenlere göre kısmi türevleridir ve bunların her biri,

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,,\; u_y = \frac{\partial u}{\partial y}\,,\; u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\; u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,,\; \ldots$$

şeklinde tarif edilir.

Bir kısmi diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türev mertebesine, diferansiyel denklemin mertebesi denir. Bilinmeyen u fonksiyonu ve kısmi türevleri birinci dereceden ise denklem doğrusal (lineer)dır.

Kısmi diferansiyel denklemler çok kapsamlı ve geniş bir konu olduğundan, burada ayrıntılı şekilde incelenmesi düşünülmemiştir. Bununla beraber, uygulamada en çok karşılaşılan diferansiyel denklemler ikinci mertebeden olduğundan, bu bölümde ikinci mertebeden doğrusal kısmi diferansiyel denklemlerden bazılarını ele almak, çözüm yöntemlerini incelemek ve çözmek bizim için yeterli olacaktır.

Genel olarak iki bağımsız değişkenli, ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde verilir.

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$E(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)\,u = G(x, y) \qquad (2)$$

Bilinmeyen $u = u(x, y)$ fonksiyonunun ve kısmi türevlerinin katsayılarının sabit sayılar olması halinde ise sabit katsayılı diferansiyel denklem elde edilir. Böyle bir denklem

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y) \qquad (3)$$

şeklinde yazılır.

İkinci mertebeden kısmi türevler, diferansiyel denklemin sınıflandırılmasında önemli rol oynar. Konik denklemlerine benzer bir terminoloji ile, $B^2 - 4AC$ diskriminant değerinin işaretine göre, (3) denklemi, hiperbolik, parabolik ve eliptik tip olarak sınıflandırılabilir. Buna göre, (3) diferansiyel denklemine

(i) $B^2 - 4AC > 0$ ise hiperbolik,

(ii) $B^2 - 4AC = 0$ ise parabolik,

(iii) $B^2 - 4AC < 0$ ise eliptik

tip diferansiyel denklem denir. Örneğin,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \qquad \text{(Hiperbolik)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \qquad \text{(Eliptik)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F \qquad \text{(Parabolik)}$$

denklemlerdir. Burada $F = F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ dir.

Matematik fiziğin en önemli denklemleri olan ısı, dalga ve Laplace (potansiyel) denklemleri de yukarıdaki şekilde sınıflandırılırlar.

(i) x konum, t zaman değişkeni olmak üzere bir boyutlu dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{hiperbolik tip} \tag{4}$$

(ii) Bir boyutlu ısı denklemi,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{parabolik tip} \tag{5}$$

(iii) x ve y konum değişkenleri olmak üzere u(x, y) fonksiyonu için iki boyutlu Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{6}$$

ve Poisson denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{7}$$

eliptik tip denklemlerdir. Bu denklemler ve çözümleri ileride ayrıntılı şekilde ele alınacaktır.

11-2 KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

Diferansiyel denklemin bağımsız değişkenlerinin bir D bölgesindeki çözümü, diferansiyel denklemdeki kısmi türevleri bu bölgede mevcut olan ve çözüm bölgesinde diferansiyel denklemi sağlayan $u(x, y, ...)$ fonksiyonudur. Genel olarak diferansiyel denklemi sağlayan birden fazla çözüm fonksiyonu bulunabilir. Örneğin,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{8}$$

denklemini, $u = x^2 - y^2$, $u = e^x \cos y$, $u = \ln(x^2 + y^2)$ fonksiyonları sağlar. Ancak, diferansiyel denklemin verilen bir fizik probleminin yanıtı olan tek bir çözümü, bu fizik olayını belirleyen birtakım koşulların (ön bilgilerin) kullanılması ile elde edilir. Diferansiyel denklemle beraber verilen bu ön bilgiler başlangıç ve sınır koşulları adını

alır. Kısmi diferansiyel denklemle birlikte, denklemin t bağımsız değişkeninin $t = t_0$ değeri için $u(t_0) = u_0$ çözümü verilirse buna başlangıç koşulu ve bu koşul altında denklemin çözümünün aranmasına ise **"Başlangıç Değer Problemi"** denir.

Kısmi diferansiyel denklemle beraber çözüm bölgesinin sınırlarında çözüm fonksiyonu veya türevlerinin değeri fizik olayını belirleyecek şekilde verilmişse bunlara sınır koşulları ve bu koşullar altında denklemin çözümünün aranmasına da **"Sınır Değer Problemi"** denir. Hem başlangıç, hem de sınır koşullarını içeren problemlere de **"Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri"** denir.

Örneğin,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad , c^2 = \text{sabit}$$

$t = t_0$ için, $u(x, t_0) = f(x)$ başlangıç koşulu ve $x = a$ için $u(a, t) = 0$ ve $x = b$ için $u(b, t) = 0$ sınır koşulları ise, problemimiz bir başlanıç ve sınır değer problemidir.

Diğer bir örnek,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 , \quad x > 0 , \quad y > 0$$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = u(x, b) = u_0$$

sınır koşulları ise, bu problem bir sınır değer problemidir.

Teorem: u_1 ve u_2 lineer homogen bir kısmi diferansiyel denklemin çözüm bölgesinde verilen başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan çözümleri ise $u = c_1u_1 + c_2u_2$ 'de diferansiyel denklemin aynı bölgede bir çözümüdür. Biz burada bazı sabit katsayılı ikinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümünü, "Değişkenlerine Ayırma" ve "Laplace Dönüşüm Yöntemi" gibi yöntemler kullanarak bulacağız.

11-3 DEĞİŞKENLERİNE AYIRMA YÖNTEMİ

Değişkenlerine ayırma yöntemi, bilinen en eski klasik çözüm yöntemidir. Bu yöntemle kısmi diferansiyel denklem çözümü, adi diferansiyel denklem çözümüne indirgenir. Bu durumda, Sturm-Liouville problemleri ve Fourier serileri karşımıza çıkar. İleride karşılaşacağımız ısı, dalga ve potansiyel (Laplace) denklemlerinin çözümünde bu yöntem uygulanmıştır.

Giriş kısmında bir boyutlu olarak verilen ısı, dalga ve Laplace denklemleri üç boyutlu uzayda genel olarak aşağıdaki şekilde verilirler.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{9}$$

Laplace operatörünü göstermek üzere, u(x, y, z, t) bilinmeyen fonksiyonu için,

$$\text{Dalga denklemi} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \nabla^2 u, \quad \beta = \text{sabit} \tag{10}$$

$$\text{Isı denklemi} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u, \quad \alpha = \text{sabit} \tag{11}$$

ve bilinmeyen $u = u(x, y, z)$ fonksiyonu için,

$$\text{Laplace denklemi} \quad \nabla^2 u = 0 \tag{12}$$

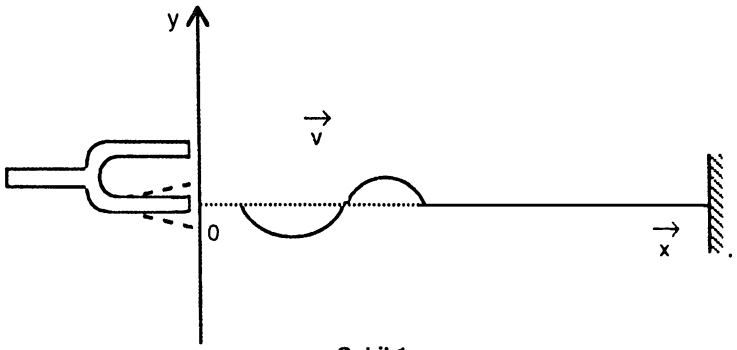
ve

$$\text{Poisson denklemi} \quad \nabla^2 u = f(x, y, z) \quad \text{şeklindedir.} \tag{13}$$

11-4 BİR BOYUTLU DALGA DENKLEMİ

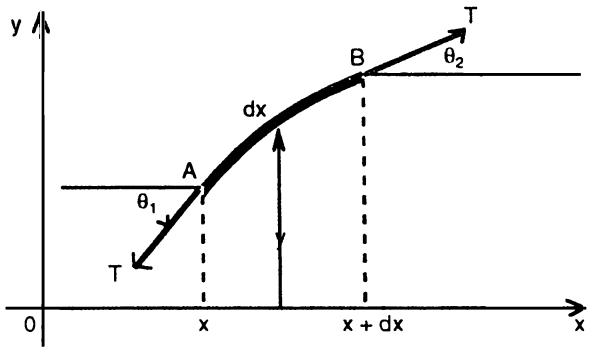
Bir ucundan bir yere ve diğer ucundan, örneğin sabit bir diyapozonun kollarından birine tesbit edilmiş sonsuz uzun, gergin, esnek ve homogen bir teli gözönüne alalım. Böyle bir tel, mikroskobik olarak, sanki birbirine esnek bağlarla bağlı sonsuz sayıda yanyana dizilmiş küçük partiküllerden meydana gelmiş gibi düşünülebilir. Yatay durumda dengede bulunan bu tele, dışarıdan bir kuvvet etki etmemekte ve telin her tarafta aynı olan gerginliği T kuvveti ile gösterilmektedir. Telin birim uzunluğunun kütlesi ise ρ ile ifade edilmektedir.

Şekil 1 'de görüldüğü gibi, şimdi diyapozon titreştirilerek, gergin telin 0 ucuna, y-ekseni doğrultusunda ve ω açısal hızı ile, küçük genlikli ve sönümsüz bir basit harmonik hareket yaptırıldığını düşünelim. O zaman, tel boyunca v hızı ile yayılan bir enine dalga hareketi oluşacak ve gergin telin her partikülü, dalga hareketinin bu partiküle ulaşmasından sonra, 0 kaynağının yaptığı basit harmonik hareketi gene y- ekseni boyunca aynı genlik ve frekansla fakat kaynağa göre bir τ zaman gecikmesi ile aynen tekrar edecektir. Gözönüne alınan partikül 0 'dan herhangi x uzaklığında ise, $\tau = x/v$ olacaktır. Burada amacımız, 0 'dan herhangi x uzaklığında bulunan partikülün herhangi bir t anında denge konumundan olan uzaklığını veren $y = y(x, t)$ ifadesini bulmaktır. Açıkça görülüyor ki, bu fonksiyon, başlangıç şartları ve sınır şartları verilen bir kısmi diferansiyel denklemin çözümünden başka birşey olamaz.



Şekil 1

Şimdi, 0 noktasından herhangi x uzaklığında bulunan dx uzunluğunda ve $dm = \rho\ dx$ kütlesinde bir tel elemanının, başka bir deyişle bir partikülün, y- ekseni doğrultusundaki hareketini gözönüne alalım. Zaman başlangıcı, 0 noktasındaki kaynak partikülün harekete başladığı an olduğuna göre, herhangi bir t anında bu partikülün konumu, Şekil 2 'de görülen konumdakine benzer şekilde olacaktır.



Şekil 2

Bu anda partikül denge konumundan y uzaklığındadır. Burada, bir partikül gözü ile baktığımız AB tel elemanının eğriliği nedeniyle, iki ucunda bu elemana etki eden T kuvvetleri aynı doğrultuda olmadığından, bu kuvvetlerin düşey bileşenleri arasındaki fark, o anda tel elemanına etki eden net F_y kuvvetini verecektir.

Öyle ise,

$$F_y = T(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

olur. Burada y çok küçük olduğundan, θ_1 ve θ_2 açıları da aynı şekilde çok küçüktür. Küçük açıların sinüsleri yerine tangentleri alınabileceğinden,

$$F_y = T(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$$

$$= T\, d(\tan\theta) = T\frac{\partial u}{\partial x}(\tan\theta)\, dx$$

olur. Burada $\tan\theta$, sonsuz küçük dx uzunluğundaki AB tel elemanının t anındaki eğimini ifade etmektedir ve değeri $\partial y/\partial x$ 'dır. Bu durumda Newton'un ikinci hareket kanununa göre partikülün hareket denklemi,

$$T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx = \rho\, dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{14}$$

elde edilir. Denk. 14 'de, $\rho/T = 1/v^2$ olduğundan, (14) denklemi, genel olarak,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15}$$

şeklinde ifade edilir. Bu denkleme **tek boyutlu dalga denklemi** denir. Şimdi amacımız, ikinci mertebeden, sabit katsayılı, lineer ve homogen bir kısmi diferansiyel denklem olan bu denklemin, başlangıç ve sınır şartlarına uyan genel çözümünü bulmaktır.

Hemen hatırlatalım ki, bir adi diferansiyel denklemin çözümünde, önce keyfi sabitler içeren genel çözüm bulunur, sonra da, denklemle birlikte verilen sınır şartları genel çözüme uygulanarak keyfi sabitler ve böylece özel çözümlerin bir lineer kombinasyonu olan genel çözüm bulunmuş olur. Kısmi diferansiyel denklemlerde ise durum tamamen farklıdır. Burada adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi keyfi sabitler ve keyfi fonksiyonlar içeren bir genel çözüm bulunsa bile, sonradan, sınır şartları uygulanarak keyfi sabitlerin değerlerinin bulunması mümkün olmamaktadır.

Sabit katsayılı, lineer ve homogen bir kısmi diferansiyel denklemin, başlangıç şartlarına ve sınır şartlarına uyan genel çözümü ise **Değişkenlerine Ayırma Metodu** adı verilen bir yöntem yardımıyla kolayca çözülebilmektedir. Buna göre, (15) numaralı dalga denklemi iki bağımsız değişken içerdiği için, bu denklemin

$$y(x,t) = X(x)\,T(t) \tag{16}$$

şeklinde bir genel çözümü vardır. Bu durumda, Denk. 16, x ve t 'ye göre ayrı ayrı kısmi türevleri alınırsa;

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T\frac{d^2X}{dx^2} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X\frac{d^2T}{dt^2}$$

bulunur. Bu değerler, Denk. 15 'de yerlerine konursa,

$$T\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{v^2}X\frac{d^2T}{dt^2}$$

veya

$$v^2\frac{d^2X/dx^2}{X} = \frac{d^2T/dt^2}{T} \tag{17}$$

elde edilir. Burada, X fonksiyonu yalnız x'in bir fonksiyonu ve T, yalnız t'nin bir fonksiyonu olduğundan (17) denkleminin her ik i tarafı bir sabit sayıya, örneğin, $-\omega^2$ gibi bir sayıya eşit yazılabilir. Böylece, verilen kısmi diferansiyel denklem, x ve t bileşenlerine ayrılmış olur ve buradan

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 X = 0 \tag{18}$$

ve

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \tag{19}$$

gibi iki ayrı adi diferansiyel denklem elde edilir. Bu demektir ki, kısmi diferansiyel denklemin başlangıç ve sınır şartlarına uyacak şekilde (18) ve (19) denklemlerinin genel çözümleri bulunabilirse, o zaman $y = XT$ denklemi de, (15) denkleminin aranan genel çözümü olacaktır.

Şimdi, gergin tel boyunca dalga hareketlerinin yayılması problemine geri dönelim. Sınır şartları ve başlangıç şartları, burada problemin ifadesinde yer aldığı şekilde olduğu gibi, problemin durumuna göre başka şekillerde de olabilir. O zaman (15) denkleminin genel çözümü de buna bağlı olarak değişik şekillerde olur. Şimdi gözönüne alacağımız gergin telimiz L uzunluğundadır ve iki ucundan tesbit edilmiştir. Bu durumda sınır şartları,

$$y(0, t) = 0 \text{ veya } X(0) = 0 \ , \quad t \geq 0 \tag{20}$$

$$y(L, t) = 0 \text{ veya } X(L) = 0 \ , \quad t \geq 0 \tag{21}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Gergin telin x noktasındaki bir partikülün herhangi bir anda denge konumundan uzaklığını ifade eden $y(x, t)$ uzanımı, sınır şartlarına bağlı olduğu gibi başlangıç şartlarına, başka bir deyişle, $y(x, 0)$ ve $\partial y\,(x, 0)/\partial t$ değerlerine de bağlıdır. Kabul edelim ki, gergin tel, $t = 0$ anında, herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu ile ifade edilen durumundan ilk hızsız olarak serbest bırakılmış olsun. O zaman başlangıç şartları,

$$y\,(x, 0) = f(x) \quad , \quad 0 \le x \le L \tag{22}$$

$$\frac{\partial y\,(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad , \quad 0 \le x \le L \tag{23}$$

olur. Bu durumda, sınır şartları ve başlangıç şartları bilinen (15) denkleminin genel çözümü aşağıdaki şekilde bulunur.

Önce, bir sınır değer problemi olan (18) denklemini ve sınır şartlarını birlikte gözönüne alalım. Bu denklemin çözümü, ω^2 'nin negatif veya pozitif bir sayı oluşuna göre değişecektir.

Açıkça görülmektedir ki, $-\omega^2$ 'nin "sıfır" olması veya "pozitif" bir sayı olması durumunda, (18) nolu sınır değer probleminin "sıfır" çözümünden başka bir çözümü yoktur. $-\omega^2$ 'nin "negatif" olması, başka bir deyişle, $\omega^2 > 0$ olması durumunda ise, Denk 18 'in genel çözümü,

$$X = c_1 \cos \frac{\omega}{v} x + c_2 \sin \frac{\omega}{v} x \tag{24}$$

olur. (20) nolu sınır şartı uygulanırsa, $c_1 = 0$ bulunur. Aynı şekilde, (24) denklemine (21) nolu sınır şartı uygulanırsa,

$$c_2 \sin \frac{\omega}{v} L = 0$$

elde edilir. Burada, $c_2 = 0$ olması hali sıfır çözümünü verdiğinden bir çözüm değildir. İkinci durum c_2 'nin değeri sıfır 'dan farklıdır ve buna karşılık

$$\sin \frac{\omega}{v} L = 0$$

dır. Bu demektir ki,

$$\frac{\omega_n}{v} L = n \pi \quad , \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots.)$$

veya

$$\omega_n = \frac{n \pi v}{L} \quad , \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots.)$$

değerleri için, sıfır çözümünün dışında çözümler elde edilmektedir. O zaman, bir Sturm-Liouville problemi olan (18) nolu sınır-değer problemimizin karakteristik değerleri $\lambda_n = n\,\pi/L$ ve denklemin çözümü olan karakteristik fonksiyonlar,

$$X_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{25}$$

elde edilir.

Şimdi (19) denklemine ve bu denklemle ilgili (22) ve (23) nolu başlangıç şartlarına geri dönelim ve böylece (15) denkleminin, $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ karakteristik değerlerine uygun çözümlerini bulmaya çalışalım. Bu durumda, Denk. 13 tekrar yazılırsa,

$$\frac{d^2T}{dt^2} + v^2 \lambda_n^2 T = 0$$

olur. Biliyoruz ki, bu denklemin genel çözümü,

$$T(t) = c_3 \cos v\lambda_n t + c_4 \sin v\lambda_n t \tag{26}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, λ_n yerine $n\,\pi/L$ değeri yazılırsa, genel çözüm

$$T(t) = c_3 \cos \frac{vn\pi}{L} t + c_4 \sin \frac{vn\pi}{L} t \tag{27}$$

bulunur.

Şimdi, $y(x, t) = X(x)\,T(t)$ fonksiyonuna, önce (23) nolu başlangıç şartı uygulanırsa,

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = X(x) \frac{dT}{dt} = 0$$

yazılır. $X(x)$'in değeri, Denk. 25 ile verildiğine göre, buradan

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad , \qquad 0 \le x \le L$$

elde edilir. Öyle ise, buradan $c_4 = 0$ bulunur. Bu durumda, (27) denklemine geri dönülürse, Denk. 19'un genel çözümü

$$T_n(t) = c_n \cos \frac{vn\pi}{L} t \, , \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{28}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi, (25) ve (28) denklemleri. Denk. 1 da yerlerine konursa,

$$y_n(x, t) = c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{vn\pi}{L} t \, , \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{29}$$

elde edilir. Burada, her n değeri için, c_n yeni bir değer alır.

Bu noktada önemle belirtelim ki (29) fonksiyonları için henüz, (15) denkleminin genel çözümünü veren fonksiyonlardır diyemiyoruz. Çünkü (22) numaralı başlangıç şartını burada henüz uygulamış değiliz.

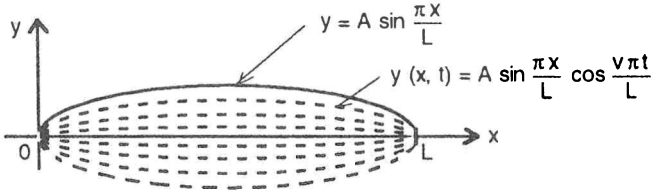
Kabul edelim ki, $t = 0$ anında gergin telin aldığı şekil,

$$y(x, 0) = f(x) = A \sin \frac{\pi x}{L}$$

fonksiyonu ile ifade edilmiş olsun. O zaman (22) nolu başlangıç şartı, (30) nolu başlangıç şartı şekline dönüşmüş olur. $f(x)$ 'in bu değeri, Denk. 29 'da yerine konursa, $n = 1$ için $c_1 = A$ bulunur. Bu durumda,

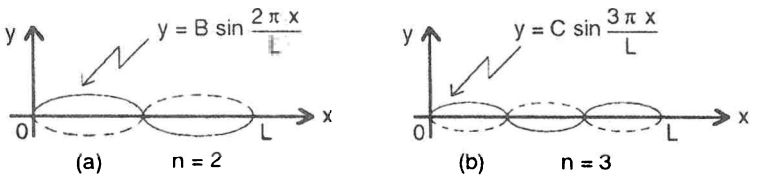
$$y_1(x, t) = A \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{v \pi t}{L} \tag{31}$$

elde edilir. Denk. 31, bütün sınır şartlarını, (23) nolu başlangıç şartını ve (30) nolu özel başlangıç şartını sağlıyan bir genel çözümdür. Bu durumda titreşen gergin tel zamana bağlı olarak, değişik zamanlarda, Şekil 3 'de görülen şekilleri alacaktır. Böyle bir titreşim hareketine,



Şekil 3

"titreşim hareketinin birinci normal modu" denir. En genel şekilde ifade etmek gerekirse, (29) fonksiyonları, her n değeri için bir "normal mod" u tarif eden çözümlerdir. Örneğin, $n = 2$ ve $n = 3$ için, bu çözümler sıra ile, $y_2(x, t) = B \sin \frac{2\pi x}{L} \cos \frac{2v\pi t}{L}$ ve $y_3(x, t) = C \sin \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{3v\pi t}{L}$ olur ve grafikleri, Şekil 4 'de verilmiştir.



Şekil 4

Öyle ise, yukarıda özel şekilde gözönüne alınan başlangıç şartı daha genel olarak,

$$y(x, 0) = f(x) = c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{32}$$

şeklinde alınırsa, o zaman (29) fonksiyonları, dalga denkleminin genel çözümünü verir. Bu fonksiyonlar, periodik fonksiyonlardır ve burada $\omega_n = \frac{v n \pi}{L}$ değerlerine de, sistemin "tabii frekansları" denir.

Bu noktada, akla gelen en önemli husus, $y = f(x)$ fonksiyonunun sadece, $\sin n \pi x/L$ karakteristik fonksiyonları şeklinde ifade edilmemesi ve herhangi bir fonksiyon olması durumunda genel çözümün nasıl olacağıdır. O zaman genel çözüm, (29) fonksiyonları şeklinde ifade edilemez.

Eğer, f(x) fonksiyonu, $0 \leq x \leq L$ aralığında türevi alınabilen sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda (16 nolu başlangıç şartı,

$$y_n(x, 0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{33}$$

şeklinde bir "Fourier Sinüs Serisi" şeklinde ifade edilebilir. Önceden biliyoruz ki, burada A_n katsayıları,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

şeklinde tarif edilmektedir. Bu durumda, (15) nolu dalga denkleminin bütün sınır şartlarına ve başlangıç şartlarına uyan genel çözümü,

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{v n \pi}{L} t \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots.) \tag{34}$$

olur.

11-5 İKİ BOYUTLU DALGA DENKLEMİ

Bir x-y düzlemi içinde, çevresinden tesbit edilmiş bir membran x-y düzlemine dik z ekseni doğrultusunda çok az miktarda denge konumundan uzaklaştırıldıktan sonra serbest bırakılırsa denge konumu etrafında titreşim hareketi yapar. Membran'ın herhangi bir (x, y) noktasındaki sonsuz küçük bir yüzey elemanına etki eden kuvvetler gözönüne alınırsa, bu yüzey elemanının herhangi bir t anında denge konumundan olan z uzaklığını veren $z = z(x, y, t)$ fonksiyonu,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \tag{35}$$

dalga denkleminin bir çözümüdür. Bu denkleme **iki boyutlu dalga denklemi** denir.

Bir membran genel olarak "dikdörtgen" şeklinde veya "daire" şeklinde olur. Her iki şekildeki membran 'ın titreşim hareketleri aşağıda incelenmiştir.

1. Dikdörtgen Şeklinde Membran

Bir membran 'ın tesbit edilen kenarları Şekil 5 'de görüldüğü gibi bir dikdörtgen ise, $z = z\,(x, y, t)$ çözüm fonksiyonunun sınır şartları,

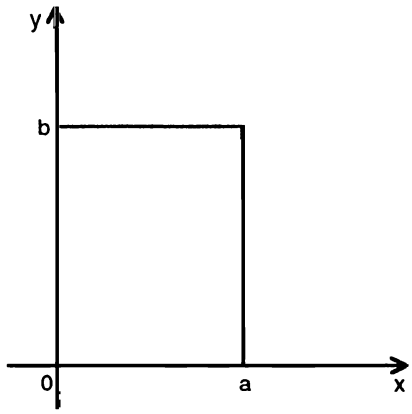
$$z\,(0, y, t) = 0 \quad , \quad z\,(a, y, t) = 0$$

$$z\,(x, 0, t) = 0 \quad , \quad z\,(x, b, t) = 0$$

ve başlangıç şartları

$$z\,(x, y, 0) = f\,(x, y), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

olur. Burada $z = f(x, y)$ fonksiyonu, membran 'ın serbest bırakıldığı $t = 0$ anındaki yüzey denklemidir.



Şekil 5

Denk. 35 'de, $z(x, y, t) = X(x)\ Y(y)\ T(t)$ konulduğunda,

$$\frac{1}{c^2 T}\frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2}$$

elde edilir. Bu denklem ancak, aşağıdaki şekilde her üç terimin uygun sabit sayılara eşit olması halinde çözüm verir.

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2$$

ve

$$\frac{1}{c^2 T}\frac{d^2 T}{dx^2} = -\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$$

Bu denklemlerin çözümleri ise,

$$X = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

$$Y = C\cos\beta y + D\sin\beta y$$

$$T = E\cos c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\ t + F\sin c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\ t$$

dır. Yukarıda verilen sınır şartları kullanılarak

$$A = 0 \qquad \alpha = \frac{m\pi}{a}$$

$$C = 0 \qquad \beta = \frac{n\pi}{b}$$

elde edilir. Burada m ve n integer 'dır. İkinci başlangıç şartı kullanılarak da $F = 0$ bulunur. Bu durumda, (35) denkleminin çözümü,

$$z = c_{mn} \sin\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y \cos c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\, t$$

elde edilir. Bu fonksiyon, yalnız birinci başlangıç şartı dışında bütün sınır şartlarını ve başlangıç şartlarını sağlamaktadır.

f(x, y) fonksiyonunun çiftli Fourier açılımı

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \sin\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y$$

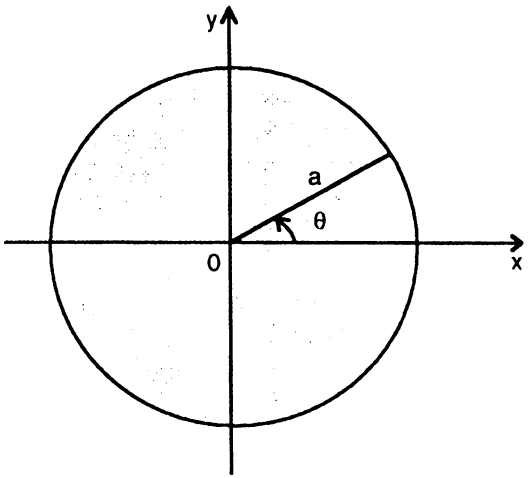
yazılır ve buna göre birinci başlangıç şartı da uygulanırsa, sonuç olarak

$$z = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \sin\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y \cos c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\, t \qquad (36)$$

elde edilir.

2. Dairesel Membran

Yarıçapı a olan bir dairesel membran (davul), x-y düzlemi içinde çevresi boyunca tesbit edilmiştir. z - ekseni doğrultusunda membran bir miktar yer değiştirir ve sonra serbest bırakılırsa titreşim hareketi yapar. Hareketin dalga denklemi (35) denklemidir.



Şekil 6

Burada (x, y) karteziyen koordinatları yerine (r, θ) polar koordinatları kullanılırsa,

$$x = r\cos\theta \quad \text{ve} \quad y = r\sin\theta$$

olduğundan, Denk. 35 'de yerine konulduğunda, polar koordinat cinsinden iki boyutlu dalga denklemimiz,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right) \tag{37}$$

şeklini alır. Simetriden dolayı burada z'nin değeri θ'dan bağımsız olduğundan z yalnız r'nin ve t'nin fonksiyonu olacaktır. Buna göre sınır şartları,

$$z(a, t) = 0$$

ve başlangıç şartları

$$z(r, 0) = f(r), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

olur. Burada $f(r)$, başlangıç anında membran yüzeyinin denklemidir.

Denk. 37 'de $z = T(t)\,R(r)$ konulduğunda,

$$\frac{1}{c^2 T}\frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{R}\left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} \right) = -k^2$$

bulunur. Böylece verilen kısmi diferansiyel denklem, sadece r ve t bağımsız değişkenlerine bağlı aşağıdaki iki adi diferansiyel denkleme indirgenmiş olur. Bu denklemler

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 c^2 T = 0 \tag{38}$$

ve

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} R \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0 \tag{39}$$

olur. Denk. 38 'in çözümü,

$$T = A \cos kct + B \sin kct \tag{40}$$

bulunur. İkinci başlangıç şartı kullanılırsa $B = 0$ elde edilir.

Denk. 39 'un çözümü olan R 'nin bulunması için önce $s = kr$ değişken değiştirmesi yapılır. O zaman (39) denklemi

$$s\frac{d^2 R}{ds^2} + \frac{dR}{ds} + s R = 0 \tag{41}$$

şeklini alır. Bu denklem ise, sıfırıncı mertebeden bir Bessel diferansiyel denklemidir ve çözümü,

$$R = CJ_0(s) = CJ_0(kr) \tag{42}$$

elde edilir. Burada $C = 1$ kabul edilirse

$$R(r) = J_0(kr) \tag{43}$$

olur. $r = a$ için ise,

$$R(a) = J_0(ka) = 0 \tag{44}$$

olacağından (44) denkleminde Bessel fonksiyonunun pozitif köklerini $k_m a = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ile gösterirsek

$$k_m a = \alpha_m \quad \text{veya} \quad k_m = \frac{\alpha_m}{a}$$

olur ve sonuç olarak (42) denkleminin çözümleri

$$R_m(r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} r\right), \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{45}$$

şeklinde elde edilir.

Denk. 38 'in $\lambda_m = ck_m$ değerleri için çözümü

$$T_m(t) = a_m \cos \lambda_m t$$

olacağından, iki boyutlu dalga denkleminin çözümü

$$z_m(r, t) = a_m \cos \lambda_m t \, J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} r\right) \tag{46}$$

olur. (46) fonksiyonları kısmi diferansiyel denklemin sınır koşullarını sağlayan çözüm fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar λ_m özdeğerlerine karşı gelen problemin öz fonksiyonlarıdır. Öz fonksiyonların toplamı da diferansiyel denklemi sağlayacağından, aşağıdaki seriyi gözönüne alır, başlangıç koşullarını kullanırsak,

$$z(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \lambda_m t \, J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} r\right) \tag{47}$$

elde edilir.

Burada görülen a_m katsayılarının bulunmasına gelince, $t = 0$ için,

$$z(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\alpha_n}{a} r\right) = f(r) \tag{48}$$

olduğundan, bu bağıntıda a_m ler, $f(r)$ fonksiyonunun Fourier-Bessel açılımının katsayılarıdır ve bu katsayılar

$$a_m = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^a r\, f(r)\, J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} r\right) dr, \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

şeklinde elde edilir.

11-6 BİR BOYUTLU ISI DENKLEMİ

Dalga denkleminden başka, gözönüne alabileceğimiz ikinci ve çok önemli bir kısmi diferansiyel denklem, bir katı cisim içinde veya belli bir homogen ortam içinde ısının yayılmasının incelenmesi probleminde karşılaşacağımız denklemdir. Burada, ısı iletimi problemini ele almadan önce, aşağıda verilen deneysel sonuçları hatırlatmakta büyük yarar vardır:

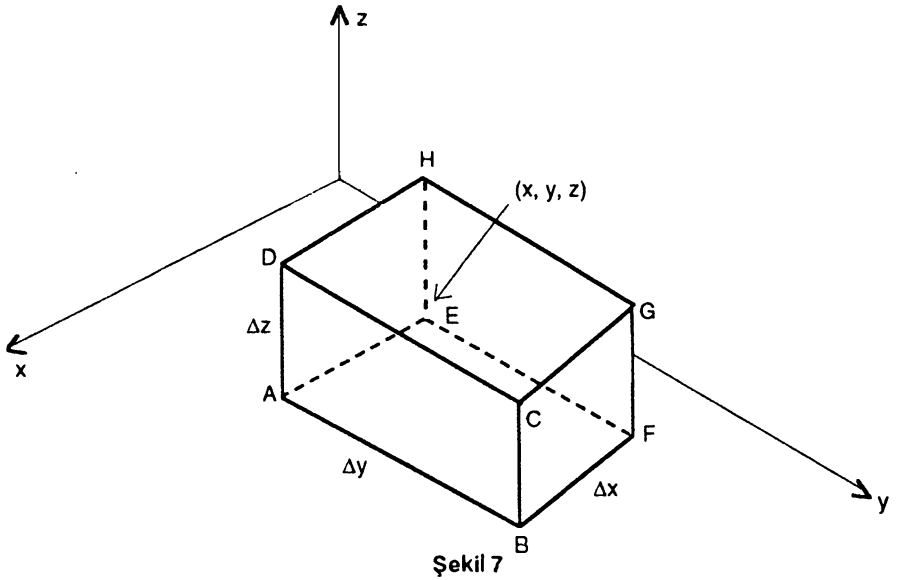
(a) Isı akışı, azalan sıcaklık yönündedir.

(b) Isı akış hızı, akışın gerçekleştiği yüzeyin alanı ve bu yüzeye dik sıcaklık gradienti ile orantılıdır.

(c) Bir cismin sıcaklığının değişmesi sonucu, o cismin kazandığı veya kaybettiği ısı, cismin kütlesi ve sıcaklık değişimi ile orantılıdır.

Yukarıda (b) şıkkında belirtilen orantılık katsayısı k "ısı iletkenlik katsayısı" ve (c) şıkkında ifade edilen orantılık katsayısı c ise, cismin "ısınma ısısı" olarak tarif edilmekte ve burada bunların ısının yayıldığı ortam içinde her tarafta sabit olduğu kabul edilmektedir.

Şimdi, gözönüne alınan cismin veya ortamın, aşağıda Şekil 7 'de görülen herhangi sonlu bir $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ hacim elemanı içinde enerji denklemini bulalım.



Şekil 7

Isının yayıldığı ortamın yoğunluğu her tarafta aynı ve ρ ise, gözönüne alınan hacim elemanının kütlesi, $\Delta m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$ olur.

Yukarıda (b) şıkkında belirtilen durum, birinci Fourier yasası olarak bilinir. Buna göre, örneğin pozitif x- ekseni yönünde gerçekleşen ısı iletimi, o yöndeki sıcaklık gradienti ile orantılıdır ve bu orantı,

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \tag{49}$$

şeklinde yazılır. Burada (–) işareti, ısı iletiminin azalan sıcaklık yönünde olduğunu göstermektedir. Denk. 49 'da görülen q ise, birim alandan birim zaman içinde geçen ısı miktarıdır. T ise sıcaklıktır.

Önce, x- ekseni yönünde yayılan ısı-enerji denklemini gözönüne alalım. Bu durumda, Δt zaman aralığı içinde $HGFE$ yüzeyinden hacim elemanına giren ısı,

$$\Delta q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_x \Delta y \Delta z \Delta t \tag{50}$$

olur. Benzer şekilde, aynı Δt süresi içinde ABCD yüzeyinden ΔV hacim elemanını terkeden ısı ise,

$$\Delta q_{x+\Delta x} = -k \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t \tag{51}$$

şeklinde ifade edilir. Öyle ise, t zamanı içinde hacim elemanı tarafından tutulan ısı miktarı,

$$\Delta q = \Delta q_x - \Delta q_{x+\Delta x} = \Delta (mcT) \tag{52}$$

olur.

Isının iletildiği ortam içinde, herhangi bir noktada ve herhangi bir t anında, birim hacimde ve birim zaman içinde üretilen ısı miktarı f(x, y, z, t) fonksiyonu ile ifade edilmiş olsun. O zaman, Δt zamanı içinde ΔV hacim elemanında üretilen ısı miktarı,

$$\Delta q' = f(x, y, z, t) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \tag{53}$$

olur. Diğer taraftan,

Giren ısı – çıkan ısı + üretilen ısı = Biriken ısı (54)

yazılabildiğinden, yukarıdaki değerler bu bağıntıda yerlerine konursa,

$$-k \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_x \Delta y \Delta z \Delta t + k \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t + f(x, y, z, t) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$= \Delta (mct)$$

$$= \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

elde edilir. Burada, bütün terimler $\Delta x \Delta y \Delta z$ ile bölünürse,

$$\frac{k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}}{\Delta x} + f(x, y, z, t) = c \frac{\Delta (\rho T)}{\Delta t} \tag{55}$$

elde edilir. Şimdi bu noktada, Δt ve Δx 'in birlikte sıfıra yaklaştığını düşünürsek, başka bir deyişle, gözönüne alınan hacim elemanının sonsuz küçük bir hacim elemanı olduğunu kabul edersek, o zaman (55) denklemi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + f(x, y, z, t) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{56}$$

şeklinde ifade edilir.

(56) denklemine, **tek boyutlu ısı iletim denklemi** denir. Isı her doğrultuda yayıldığına ve pek çok problemde olduğu gibi cisim içinde ısı üreten bir ısı kaynağı bulunmadığı zaman, genel üç boyutlu ısı iletim denklemi,

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{57}$$

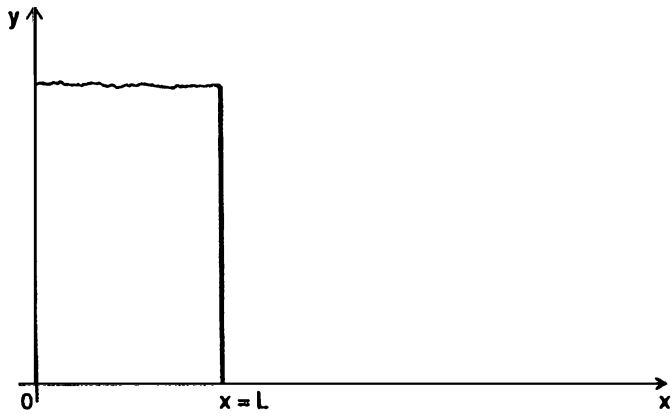
olur.

Zamana bağlı olmayan sıcaklık dağılımı konusunda ise, $\partial T/\partial t = 0$ olacağından, (37) denklemi,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{58}$$

denklemine dönüşür. Bu denkleme de Laplace denklemi denildiğini önceden biliyoruz.

Şimdi amacımız, (57) denklemini, herhangi bir belirgin ısı iletimi problemine uygulamak ve problemi çözmektir. Örnek olarak Şekil 6 'da görülen sonsuz büyüklükte bir ince levhada, levha yüzeyine dik x-ekseni doğrultusunda zamana bağlı olarak yayılan ısı iletimi problemini ele alalım. Burada, ısı kaybı



Şekil 8

levhanın iki yüzeyinden olmakta, levha y ve z eksenleri boyunca sonsuza doğru uzandığı için ısı iletimi yalnızca x- ekseni boyunca gerçekleşmektedir. Bu durumda, (57) denklemini probleme uygularsak,

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{59}$$

elde edilir. Burada, bir değişken değiştirme yaparak T yerine U (x, t) ve k/ ρc yerine de a alınırsa, (59) denklemi

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{60}$$

şeklini alır.

Şimdi kabul edelim ki, levhanın her iki yüzeyinde sıcaklık sabit ve aynıdır, örneğin, 0°C dir. Bu demektir ki, sınır şartları,

$$u(0, t) = u (L, t) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{61}$$

dır. Ayrıca kabul edelim ki $t = 0$ anında levha içinde sıcaklık dağılımı x'e bağlı olarak $f(x)$ fonksiyonu ile verilmiş olsun. Bu durumda, başlangıç şartı,

$$u (x, 0) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq L \tag{62}$$

olur. Şimdi amacımız, sınır ve başlangıç şartlarına uyacak şekilde (60) denkleminin genel çözümünü bulmak, başka bir deyişle, cismin herhangi bir x noktasında bir t anında $u(x, t)$ sıcaklığını bulmaktır.

Dalga denkleminde olduğu gibi değişkenlerine ayırma metodu kullanılanarak (60) numaralı ısı denkleminin de genel çözümü

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \tag{63}$$

şeklinde yazılır. Bu çözüm, Denk. 40 'da yerine konduğunda

$$\frac{d^2X/dx^2}{X} = \frac{1}{a}\,\frac{d^2T/dt^2}{T} \tag{64}$$

elde edilir. Bu demektir ki, Denk. (64) 'ün her iki tarafı da ayni bir sabit sayıya, örneğin $-\lambda^2$'ye eşittir. Buradan,

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \lambda^2 X = 0 \tag{65}$$

ve

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \lambda^2 aT = 0 \tag{66}$$

gibi iki adi diferansiyel denklem elde edilir. (65) denkleminin genel çözümü,

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \tag{67}$$

dır. (62) nolu sınır şartları uygulandığında, $c_1 = 0$ ve $c_2 \neq 0$ bulunur. Böylece, (65) denkleminin karakteristik değerleri $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ ve karakteristik çözümleri,

$$X_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{68}$$

bulunur.

(66) denkleminin genel çözümü ise,

$$T_n(t) = c_n e^{-(n\pi/L)^2 at} \tag{69}$$

olduğundan, Denk. 40 'ın, (1) nolu sınır şartlarını sağlayan genel çözümü,

$$u_n(x,t) = c_n e^{-(n\pi/L)^2 at} \sin \frac{n\pi}{L}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{70}$$

elde edilir.

Şimdi, son olarak, (62) nolu başlangıç şartını uygulamadan önce, f(x) fonksiyonunun, $0 \le x \le L$ aralığında türevi alınabilir sürekli bir fonksiyon olduğu kabul edilirse, o zaman f(x) fonksiyonunun,

$$u(x,0) = \sum_{n=1} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

şeklinde yazılabildiğini biliyoruz. Bu durumda, Denk. 60 'ın genel çözümü,

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi/L)^2 at} \sin \frac{n\pi}{L} x \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (71)$$

bulunur.

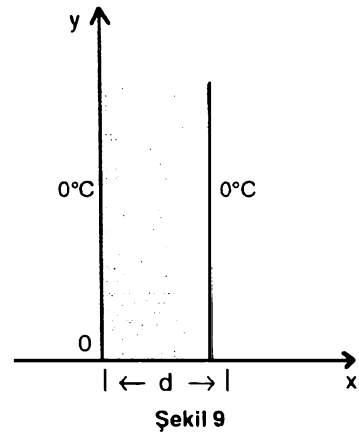
Burada A_n katsayıları, Fourier katsayıları olduğundan, bu sayılar aşağıda verilen

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

formülünden elde edilir.

11-7 İKİ BOYUTLU ISI DENKLEMİ

Eni d olan sonsuz uzun ince bir metal şerit x-y düzlemi içinde Şek. 9 'da görüldüğü gibi y ekseni boyunca uzanmaktadır. Şeridin tabanında sıcaklık $f(x)$ ile veriliyor ve şeridin uzun kenarlarında sıcaklık $0°C$ de tutuluyor. Sıcaklık tabandan uzaklaştıkça azaldığına göre, rejim halinde (kararlı steady-state) metal şerit içindeki sıcaklık dağılımı aşağıdaki şekilde bulunabilir.



Şekil 9

İki boyutlu ısı denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \qquad (72)$$

dır. Burada $u = u(x, y, t)$, herhangi bir t anında şerit metal içinde bir noktanın sıcaklığını veren fonksiyondur.

(72) denkleminde, $c^2 = 1$ kabul edilirse, kararlı denge halinde sıcaklığın zamanla değişimi sıfır olacağından $\partial u/\partial t = 0$ olur ve bu durumda ısı denklemi Laplace denklemine indirgenir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (73)$$

Bu durumda problemin sınır koşulları,

$x = 0$ için $\quad u(0, y) = 0$

$x = d$ için $\quad u(d, y) = 0$

$y = 0$ için $\quad u(x, 0) = f(x)$

$y \to \infty$ için $\lim_{y\to\infty} u(x, y) = 0$

şeklinde ifade edilir. Değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözümde

$$u(x, y) = X(x)\,Y(x)$$

kabul edilir. Kısmi türevler alınarak Denk. 73 'de yerine konursa,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2$$

ve buradan

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2X = 0 \tag{74}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - k^2Y = 0 \tag{75}$$

elde edilir. (74) ve (75) denklemlerinin çözümleri, sıra ile

$$X(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

$$Y(y) = Ce^{ky} + De^{-ky}$$

dır. Sınır koşulları kullanılırsa,

$x = 0$ için $X(0) = A = 0$

ve

$y \to \infty$ için $Y(\infty) = Ce^{\infty} + De^{-\infty} = 0$

olur. Görülüyor ki ancak $C = 0$ olması halinde $Y(\infty) = 0$ oluyor. Buna göre kısmi diferansiyel denklemin çözümü,

$$u(x, y) = E\sin kx\, e^{-ky} \tag{76}$$

bulunur. Diğer sınır koşullarını Denk. 76 'da uygulayarak,

$$x = d, \qquad u(d, y) = E\sin kd\, e^{-ky} = 0$$

Burada $E \neq 0$ ve $\sin kd = 0$ olacağından,

$$kd = n\pi \quad \text{ve} \quad k = k_n = \frac{n\pi}{d}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

problemin özdeğerleridir. Öz fonksiyonlar,

$$u_n(x, y) = E_n \sin k_n x e^{-k_n y}$$

$$= E_n \sin \frac{n\pi x}{d}\, e^{-n\pi y/d} \tag{77}$$

bulunur. Öz fonksiyonlann toplamı da çözüm olacağından

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi x}{d} e^{-n\pi y/d} \tag{78}$$

Şimdi, $y = 0$ için $u(x, 0) = f(x)$ sınır koşulu da kullanılırsa

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi}{d} x = f(x)$$

Burada E_n'ler $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisine açılımındaki katsayılarıdır ve aşağıdaki şekilde hesaplanırlar;

$$E_n = \frac{2}{d} \int f(x) \sin \frac{n\pi x}{d} dx$$

O halde, metal şerit içindeki sıcaklık dağılımı

$$u(x,y) = \frac{2}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{d} e^{-n\pi y/d} \int f(x) \sin \frac{n\pi x}{d} dx \tag{79}$$

elde edilir.

11-8 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ METODU

Laplace dönüşümü, lineer ve sabit katsayılı bir adi diferansiyel denklemi, lineer cebirsel bir denkleme indirger. Bu cebirsel denklemden yararlanarak bağımsız değişkenin dönüşümü bulunarak çözüme ulaşılır. Benzer bir şekilde, iki değişkenli, sabit katsayılı, lineer kısmi diferansiyel denklemleri de Laplace dönüşümü aracılığı ile çözmek mümkün olmaktadır. Ancak, bu durumda, cebirsel denklem yerine bir adi diferansiyel denklem elde edilir.

Sınır ve başlangıç şartları ile birlikte verilmiş olan bir kısmi diferansiyel denklem, genel olarak zamanı temsil eden t serbest değişkeni cinsinden Laplace transformu ile dönüştürülür.

Herhangi bir $f(x, t)$ fonksiyonunun, x ve t'ye göre ikinci kısmi türevlerinin Laplace dönüşümü şu şekilde elde edilir:

$$L\left\{\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} e^{-st} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} f(x,t) e^{-st} dt$$

$$= \frac{d}{dx} L\{f(x,t)\} \tag{80}$$

Benzer şekilde,

$$L\left\{\frac{\partial^n f(x,t)}{\partial x^n}\right\} = \frac{d^n}{dx^n} L\{f(x,t)\} \tag{81}$$

yazılabilir.

Zamana bağlı kısmi türevlerin Laplace dönüşümü ise, bir türevin dönüşümü şeklinde değerlendirilmelidir. Çünkü, burada t, dönüşümün bağımsız değişkeni kabul edilmiştir. Bu durumda,

$$L\left\{\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right\} = L\{f(x,t)\} - s f(x,0) \tag{82}$$

$$L\left\{\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}\right\} = L\{f(x,t)\} - s f(x,0) - s\frac{\partial f(x,0)}{\partial t} \tag{83}$$

elde edilir.

Örnek 1. Pozitif x-ekseni boyunca uzanan ve başlangıçta denge halinde bulunan sonsuz uzun gergin bir telin O noktasında bulunan sol ucuna, $t = 0$ anından itibaren devamlı bir hareket uyguladığımızı düşünelim. Bu durumda, herhangi bir t anında, gergin telin sol ucu, başlangıç konumundan $y(0, t) = f(t)$ uzaklığında olsun. Burada $f(t)$ bizce bilinen bir fonksiyondur. Bu durumda, gergin telin O başlangıç noktasından x uzaklığında olan bir noktasının bir t anında denge konumundan olan uzaklığını ifade eden $y(x, t)$ değerini bulmaya çalışalım.

Tel boyunca hareketin yayılması ile ilgili dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{84}$$

$$y = (0, t) = f(t), \quad x \to \infty \text{ için } y(x, t) \text{ sınırlı} \tag{85}$$

ve başlangıç şartları da,

$$y(x, 0) = 0 \quad \text{ve} \quad \partial y/\partial t\,|_{x,0} = 0 \tag{86}$$

olduğundan, bu denklemin t'ye göre Laplace dönüşümünü alacak olursak,

$$s^2 L\{y(x, t)\} - s\,y(x, 0) - \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x,0} = v^2 \frac{d^2}{dx^2} L\{y(x, t)\}$$

veya

$$\frac{d^2}{dx^2} L\{y(x, t)\} - \frac{s^2}{v^2} L\{y(x, t)\} = 0 \tag{87}$$

elde ederiz. Görülüyor ki, elimizdeki (84) nolu kısmi diferansiyel denklem, Laplace dönüşümü uygulanarak, sabit katsayılı, ikinci mertebe homogen bir adi diferansiyel denkleme indirgenmiştir.

Şimdi, (87) denklemi, L {f(x, t)} için çözülecek olursa,

$$L\{f(x,t)\} = A(s)\exp\left(-\frac{s}{v}x\right) + B(s)\exp\left(\frac{s}{v}x\right) \tag{88}$$

bulunur. Denk. (85) uyarınca, x 'in her değeri için $y(x, t)$ sonlu bir değer olduğundan, $L\{y(x, t)\}$ de sonlu olacaktır. Öyle ise, $B(s) = 0$ 'dır. O zaman Denk. 60,

$$L\{y(x,t)\} = A(s)\exp\left(-\frac{s}{v}x\right) \tag{89}$$

şeklini alır. Şimdi de, diğer sınır şartı kullanılırsa,

$$L\{y(0,t)\} = A(s) = L\{f(t)\}$$

bulunur. Bu değerler (60) denkleminde yerine konursa

$$L\{y(x,t)\} = L\{f(t)\}\exp\left(-\frac{s}{v}x\right) \tag{90}$$

elde edilir. Diğer taraftan ters Laplace dönüşümü ile ilgili olarak biliyoruz ki eğer,

$$L^{-1}\{\phi(s)\} = f(t)$$

ise, o zaman,

$$L^{-1}\{\exp(-ks)\,\phi(s)\} = f(t-k)\,u(t-k)$$

olur. Bu kuralı uygulayarak, şimdi (90) denklemine geri dönersek, buradan

$$y(x,t) = f\left(t-\frac{x}{v}\right)u\left(t-\frac{x}{v}\right) \tag{91}$$

elde edilir.

Denk. (91), tel boyunca sağa doğru v hızı ile yayılan bir dalga hareketini temsil eder. Bu denklemden açıkça görülüyor ki, tel üzerinde bulunan her nokta, x/v gecikmesi ile O noktasının hareketini aynen tekrar eder.

Örnek 2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ diferansiyel denklemini, $u(0, t) = 0$, $u(5, t) = 0$ sınır ve $u(x, 0) = 10 \sin 4\pi x$ başlangıç koşulları altında çözünüz. (92)

Sınır ve başlangıç şartları ile birlikte verilmiş olan yukarıdaki kısmi diferansiyel denklem, t serbest değişkeni cinsinden Laplace transformu ile dönüştürülür.

Buna göre,

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU - u(x, 0) = sU - 10 \sin 4\pi x$$

$$L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2 U}{dx^2}$$

olur. Bu değerler diferansiyel denklemde yerine konursa, (92) kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki adi diferansiyel denkleme indirgenir.

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{s}{2} U = 10 \sin 4\pi x \tag{93}$$

Denk. 93, ikinci mertebeden homogen olmayan bir diferansiyel denklemdir ve çözümü,

$$U(x,5) = c_1 e^{\sqrt{s/2}x} + c_2 e^{-\sqrt{s/2}x} - \frac{10}{s + 32\pi^2} \sin 4\pi x \tag{94}$$

dır. Sınır koşullarının Laplace dönüşümleri,

$$L\{u(0, t)\} = \int_0^{\cdot} 0 \cdot e^{-st} dt = 0$$

$$L\{u(5, t)\} = \int_0^{\cdot} 0 \cdot e^{-st} dt = 0$$

olur. Bu koşullar $x = 0$ ve $x = 5$ için (94) denklemine uygulanırsa,

$$c_1 + c_2 = 0 \tag{95}$$

$$e^{5\sqrt{s/2}} c_1 + e^{-5\sqrt{s/2}} c_2 = 0 \tag{96}$$

olur. (95) ve (96) denklemlerinin çözümünden c_1 ve c_2 katsayıları bulunur. Homogen sistemin $c_1 = c_2 = 0$ çözümü vardır. O halde,

$$U(x, s) = \frac{-10}{s + 32\pi^2} \sin 4\pi x$$

olur. Ters Laplace dönüşümü ile, verilen başlangıç ve sınır değer probleminin çözümü,

$$u(x, t) = L^{-1}\{U(x, s)\} = -10\, e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x \tag{97}$$

elde edilir.

Örnek 3. Yalıtılmış uzun bir kabloda elektrik akımı ile ilgili olarak, v (volt) potansiyel ve i (amper) akım şiddeti olmak üzere, aşağıdaki kısmi diferansiyel denklem sistemi bulunur.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{98}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial v}{\partial t} \tag{99}$$

Burada x, kablonun bir ucundan itibaren gözönüne alınan uzaklıktır. L ve C ise bilinen elektrik sabitleridir. (98) ve (99) denklemlerinden i yok edilirse, o zaman problem bir boyutlu dalga denklemine dönüşür.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{100}$$

Bu denkleme "**Telgraf Denklemi**" denir. Benzer denklem i için de elde edilebilir.

Başlangıçta hattın kesik olduğu düşünülürse,

$$v(x, 0) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \tag{101}$$

koşulu elde edilir. $t > 0$ anında kablonun ucundan $f(t)$ potansiyeli uygulanırsa,

$$v(0, t) = f(t) \tag{102}$$

koşulu bulunur. Kablonun diğer ucu açık ise,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=1} = 0 \tag{103}$$

yazılır. Bu durumda (101), (102), (103) koşulları, problemin başlangıç ve sınır koşullarını verir.

(87) denkleminin t değişkenine göre Laplace dönüşümünü alırsak,

$L\{v(x, t)\} = V(x, s)$ olmak üzere,

$$\frac{d^2 C}{dx^2} = LC\left[s^2 V - s\, v(x,0) - \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0}\right] \tag{104}$$

bulunur. (101) nolu başlangıç koşulları kullanılarak

$$\frac{d^2V}{dx^2} - LC\,s^2\,V = 0 \qquad (105)$$

olur. $c = 1/\sqrt{LC}$ yazarsak, Denk. 105 aşağıdaki şekli alır.

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2}\,V = 0 \qquad (106)$$

Bu denklemin çözümü,

$$V = V(x, s) = A(s)\,e^{-sx/c} + B(s)\,e^{sx/c} \qquad (107)$$

olur. Şimdi ise, sınır koşullarının da Laplace dönüşümleri alınır ve Denk. 107 'ye uygulanırsa,

$$L\{v(0, t)\} = L\{f(t)\} = f(t)$$

$$L\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{l=0}\right\} = 0$$

yazılır. A(s) ve B(s) 'de aşağıdaki denklem takımı ile belirlenir.

$$A(s) + B(s) = F(s) \qquad (108)$$

$$-A(s)\,e^{-sl/c} + B(s)\,e^{sl/c} = 0 \qquad (109)$$

(108) ve (109) denklemleri çözülerek,

$$A(s) = \frac{F(s)}{1 + e^{-2sl/c}} \quad \text{ve} \quad B(s) = \frac{F(s)}{1 + e^{2sl/c}} \qquad (110)$$

bulunur.

(i) Sonsuz uzunlukta bir hat (kablo) için $l = \infty$ alınırsa,

$A(s) = F(s)$ ve $B(s) = 0$

elde edilir. O zaman, Denk. 94,

$$V(x, s) = F(s)\,e^{-sx/c} \qquad (111)$$

şeklini alır. (111) 'in ters Laplace dönüşümü alınarak telgraf denkleminin çözümü

$$v(x, t) = \begin{cases} f(t - x/c) & t > x/c \text{ olduğunda} \\ 0 & t < x/c \text{ olduğunda} \end{cases} \qquad (112)$$

(ii) sonlu uzunlukta bir hat için ise, (97) katsayıları Denk. 94 'de yerlerine konursa,

$$V(x, s) = F(s)\,\frac{\cosh\left[s\,(l - x)\,/\,x\right]}{\cosh\,(sl/c)} \tag{113}$$

elde edilir. Ters dönüşümünü almak için, (113) denklemi üstel formda yazılırsa,

$$V(x, s) = F(s)\,\frac{e^{-sx/c} + e^{-s(2l-x)/c}}{1 + e^{-2sl/c}} \tag{114}$$

olur. Burada, $1/1 + e^{-2sl/c}$ ifadesi, $e^{-2sl/c}$ (nin kuvvetlerine göre seriye açılır ve Denk. 114 'de yerine konursa,

$$V(x, s) = F(s)\left[e^{-sx/c} + e^{-s(2l-x)/c} - e^{-s/2l+x)/c} - e^{-s\,(4l-x)/c} + \ldots.\right] \tag{115}$$

elde edilir. Bundan sonra ters Laplace dönüşümü ile aşağıda verilen terim terim çözüm elde edilir.

$$v\,(x, t) = L^{-1}\left\{V\,(x, s)\right\} = \begin{cases} f\left(t - \dfrac{x}{c}\right) & t > \dfrac{x}{c} \text{ ise} \\ 0 & t < \dfrac{x}{c} \text{ ise} \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} f\left(t - 2\,\dfrac{l}{c} + \dfrac{x}{c}\right) & t > \dfrac{2l}{c} - \dfrac{x}{c} \text{ ise} \\ 0 & t < \dfrac{2l}{c} - \dfrac{x}{c} \text{ ise} \end{cases}$$

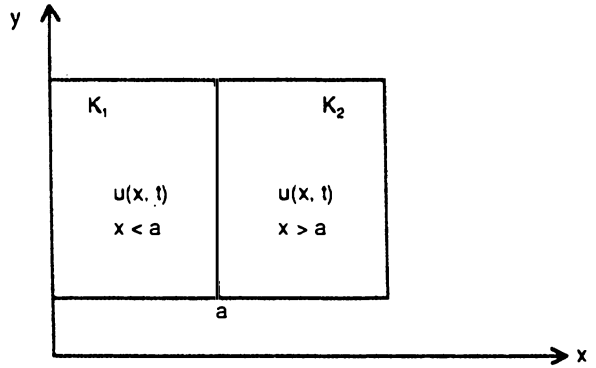
$$- \begin{cases} f\left(t - 2\,\dfrac{l}{c} - \dfrac{x}{c}\right) & t > \dfrac{2l}{c} + \dfrac{x}{c} \text{ ise} \\ 0 & t < \dfrac{2l}{c} + \dfrac{x}{c} \text{ ise} \end{cases}$$

$$- \begin{cases} f\left(t - 4\,\dfrac{l}{c} + \dfrac{x}{c}\right) & t > \dfrac{4l}{c} - \dfrac{x}{c} \text{ ise} \\ 0 & t < \dfrac{4l}{c} - \dfrac{x}{c} \text{ ise} \end{cases}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

11-9 BİRLEŞİK CİSİMLERDE SICAKLIK DAĞILIMI

x yolu boyunca t- zamanında $u(x, t)$ iki değişkenli fonksiyonu, boyutsuzlaştırılmış sıcaklık dağılımını göstersin. Isı iletim katsayıları K_1, K_2 olan iki malzemenin *"a"* sınırında temas ettiğini varsayalım, (Şekil 10).



Şekil 10

Bu sınırda ısı üretimi ve ısı absorbsiyonu yoksa, ısı akısı sürekli olmalıdır, yani $K(\partial u/\partial x)$ değeri aynı olmalıdır. Matematiksel olarak

$x = a$ da $\quad u(x, t) - u(x, t) = 0 \quad$ yazılabilir.

$(x < a) \qquad (x > a)$

Şekil 10 'deki sistemde

$x = a$ için $\quad K_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} = K_2 \dfrac{\partial u}{\partial x}$ dir.

Eğer ısıl temas mükemmel ise sıcaklık da süreklidir. O halde

$x = a$ da $\quad u(x, t) = u(x, t)$ yazılabilir.

$(x < a) \qquad (x > a)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<a}} u(x, t) = u(a - 0, t) \quad \text{ve} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>a}} u(x, t) = u(a + 0, t)$$

gösterimleri kullanılmak üzere,

$$u(a - 0, t) = u(a + 0, t) \quad t > 0 \tag{116}$$

$$K_1 u_x (a - 0, t) = K_2 U_x (a + 0, t) \quad t > 0 \tag{117}$$

yazılabilir.

Örnek 1. Bir yüzü yalıtılmış, iki tarafı farklı birleşik malzemenin ısıl iletim ve difuzivite katsayıları sırasıyla, malzemenin

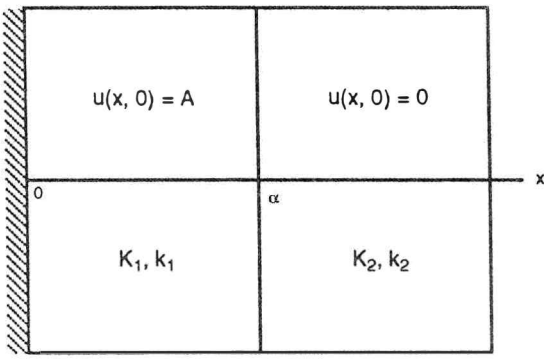
I. bölgesinde $0 < x < a$ için K_1, k_1 ve

II. bölgesinde $x > a$ için K_2, k_2 olarak belirlensin, Şekil 11.

Başlangıç koşulu,

$0 < x < a$ için $u(x, 0) = A$ ve $x > a$ için $u(x, 0) = 0$

olarak verilsin. $x = a$ noktasındaki teması da gözönüne alarak oluşan sıcaklık dağılımını elde ediniz.



Şekil 11

Çözüm: $0 < x < a$, $u_x(x, t) = 0$ $t > 0$ için

$u_t(x, t) = k_1 u_{xx}(x, t)$, $u(x, 0) = A$ (118)

$x > a$, $t > 0$ için

$u_t(x, t) = k_2 u_{xx}(x, t)$, $u(x, 0) = 0$ (119)

olduğu açıktır.

Eşitlikler (118) ve (119) 'un Laplace dönüşümleri alınıp başlangıç koşulları ilave edilirse,

$$s\,U(x, s) - A = k_1 U_{xx}(x, s) \tag{120}$$

$$s\,U(x, s) = k_2 U_{xx}(x, s) \tag{121}$$

Burada $U_x(0, s) = 0$ ve $\lim_{x \to \infty} U(x, s) = 0$ (122)

elde edilir.

Eşitlikler (120) ve (121) adi türevli diferansiyel gibi düşünüp (122) eşitliği ile verilen sınır koşulları uygulanırsa,

$$U(x, s) = C_1 \cos h\, x \sqrt{\frac{s}{k_1}} + \frac{A}{s} \quad (0 \le x < a) \tag{123}$$

$$U(x, s)\, C_2 \exp\left(- x \sqrt{\frac{s}{k_2}} \right) \quad (x > a) \tag{124}$$

bulunur.

Bu aşamada ters Laplace dönüşümü almadan önce C_1 ve C_2 sabitlerinin elde edilmesi gerekir. Çünkü bu sabitler *"s"* parametresini içerirler.

Eşitlikler (116) ve (117) nin Laplace dönüşümü alınarak, eşitlikler (123) ve (124) üzerine taşınırsa *"s"* parametresini içeren C_1 ve C_2 değerleri kolayca bulunur. Eşitlikler (123) ve (124) sırasıyla,

$$U(x, s) = \frac{A}{s}\left(1 - \frac{1 - \lambda}{2} \frac{e^{-\delta(a+x)} + e}{1 - \lambda e^{-2\delta a}} \right), \quad (0 < x < a) \tag{125}$$

ve

$$U(x, s) = \frac{A(1 + \lambda)}{2s} \frac{e^{\delta\mu(x-a)} + e^{-\delta(2a + \mu x - \mu a)}}{1 - \lambda e^{-2\delta a}} \quad (x > a) \tag{126}$$

elde edilir. Burada, $\delta = \sqrt{\frac{s}{k_1}}$ $\mu = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$, $\lambda = \frac{K_1\sqrt{k_2} - K_2\sqrt{k_1}}{K_1\sqrt{k_2} + K_2\sqrt{k_1}}$

olarak alınmıştır.

$\delta\mu = \sqrt{s / k_2}$ ve $|\lambda| < 1$ olduğu açıktır.

Eşitlik (125) $m = 2n + 1$ için düzenlenirse, seri şeklinde

$$\frac{U(x, s)}{A} = \frac{1}{s} - \frac{1 - \lambda}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\delta(ma - x)} + e^{-\delta(ma + x)} \right) \quad (0 < x < a) \tag{127}$$

elde edilir. Yine aynı şekilde eşitlik (126)

$$\frac{U(x, s)}{A} = \frac{1 + \lambda}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{s} \left(e^{-\delta(2na + \mu x - \mu a)} - e^{-\delta(2na + 2a + \mu x - \mu a)} \right) \tag{128}$$

olarak yazılabilir. Eşitlikler (127) ve (128) in Ters Laplace dönüşümleri kolaylıkla alınabilir. Birleşik eleman için sıcaklık dağılımı,

$$u(x,t) = A - A\frac{1-\lambda}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\left\{\operatorname{erfc}\left[\frac{(2n+1)a - x}{2\sqrt{k_1 t}}\right]\right.$$

$$\left. + \operatorname{erfc}\left[\frac{(2n+1)a + x}{2\sqrt{k_1 t}}\right]\right\} \quad (0 < x < a) \tag{129}$$

$$u(x,t) = A\frac{1+\lambda}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\left\{\operatorname{erfc}\left[\frac{(2na + \mu(x-a))}{2\sqrt{k_1 t}}\right]\right.$$

$$\left. - \operatorname{erfc}\left[\frac{(2n+2)a + \mu(x-a)}{2\sqrt{k_1 t}}\right]\right\} \quad (x > a) \tag{130}$$

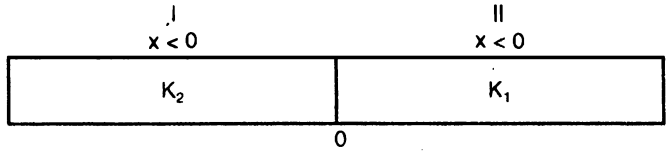
olarak elde edilir.

Buraya kadar birleşik elemanların nem tutmayan birer katı olması hali düşünüldü. Şayet malzemeler gözenekli, yani bünyelerinde su tutabilecek özellikte iseler, eşitlik (116)

$$u(a+0,t) = \alpha\, u(a-0,t) \tag{131}$$

şeklinde olur. Burada $\alpha \neq 1$ olup malzemelere özgü bir orandır.

Örnek 2. Termal difuziviteleri K_1 ve K_2 olan iki gözenekli cisim $x = 0$ noktasında birleşik durumdadır, Şekil 12.



Şekil 12

$x < 0$ olan I nolu malzemede $u(x, 0) = u_0$, $x > 0$ olan II nolu malzemede $u(x, 0) = v_0$ olarak verilmektedir. $\alpha \neq 1$ olmak üzere cisimlere ilişkin katsayıdır. Bu bilgiler ile zamana bağlı olarak tüm eksen için sıcaklık dağılımını elde ediniz.

Çözüm: $x < 0$ için

$$\left.\begin{aligned} &u_t(x,t) = K_1 u_{xx}(x,t), \quad t > 0 \\ &u(x,0) = u_0; \quad \lim_{x\to-\infty} u(x,t) = u_0 \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

ve $x > 0$ için

$$\left.\begin{aligned} &u_t(x,t) = K_2\, u_{xx}(x,t), \quad t > 0 \\ &u(x,0) = v_0 \qquad \lim_{x \to +\infty} u(x,t) = v_0 \end{aligned}\right\} \tag{133}$$

eşitlikleri yazılabilir. Eşitlikler (132) ve (133) Örnek 1 'deki yaklaşım yolu ile çözülürse,

$x < 0$ için

$$u(x,t) = \frac{u_0 - \alpha v_0}{\alpha + \beta}\left[\operatorname{erfc}\left(-x / 2\sqrt{K_1 t}\right)\right] + v_0 \tag{134}$$

ve

$x > 0$ için

$$u(x,t) = \beta\frac{\alpha v_0 - u_0}{\alpha + \beta}\left[\operatorname{erfc}\left(x / 2\sqrt{K_2 t}\right)\right] + u_0 \tag{135}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu çözümler tüm eksen için elde edilmiş sonuçlardır. $t > 0$ için uygulamacının her x için nümerik bir sonuç olması mümkündür. Nümerik sonuç için Ek - 2 deki tablo kullanılır.

ALIŞTIRMALAR

1. $y(x,t) = F(x+vt)$ ve $y(x,t) = G(x-vt)$ fonksiyonlarının ayrı ayrı,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

dalga denklemini sağladığını ve ayrıca, bu fonksiyonların lineer kombinasyonu olan $y(x,t) = f(x+vt) + g(x-vt)$ fonksiyonunun da aynı dalga denklemini sağladığını gösteriniz.

2. Kabul edelim ki, $g(x)$ fonksiyonunun Fourier açılımı vardır. Buna göre,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$ dalga denkleminin

$y(0,t) = 0$, $y(L,t) = 0$ sınır şartlarına ve,

$y(x, 0) = 0$, $\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x)$ başlangıç şartlarına uyan genel çözümünü bulunuz.

3. Değişkenlerine ayırma metodunu kullanarak,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(1, t) = 0 \qquad t \geq 0 \qquad \text{(sınır şartları)}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad \text{(başlangıç şartları)}$$

denklemini çözünüz.

4. $u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} e^{-(x-s)^2/4kt}$ fonksiyonunun

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$ ısı denklemini sağladığını gösteriniz.

5. $\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ kısmi diferansiyel denklemini,

$t = 0$ da $T = f(x)$

$x = 0$, $t > 0$ da $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{h}{k}(T - T_1)$

$t \to \infty$ ve $x = 0$ da $T \to T_1$

koşullarında çözünüz.

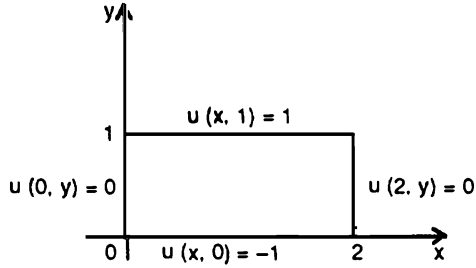
6. $\nabla^2 u = 0$ Laplace denkleminin genel çözümünün değişkenlerine ayırma yöntemi ile bulunuz.

7. $l = 10$ cm uzunluğunda ve $1\ cm^2$ kesitinde gümüş bir çubuk boyunca yalıtılmıştır. Çubuğun iki ucunda sıcaklık 0°C de tutulduğuna ve ilk anda sıcaklığı $f(x) = x(10 - x)$ ile verildiğine göre çubuk içindeki sıcaklık dağılımını bulunuz.

8. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ kısmi diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

9. $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ titreşim denklemini $c^2 = 1$ alarak $u(0, t) = u(\pi, t)$ sınır koşulları ve $u(x, 0) = 0.02 \sin x$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{t=0} = 0$ başlangıç koşulları altında yapınız.

10. Şekildeki dikdörtgen levhada potansiyel dağılımını hesaplayınız.



11. $\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ diferansiyel denklemini, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$, $u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0$ sınır ve $u(x, 0) = 30 \cos 5x$ başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümü ile çözünüz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİNİN YANITLARI

BÖLÜM 1.

Sayfa 13.

1. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin herbirinde denklemlerin mertebesini ve lineer olup olmadığını belirleyiniz.

a. 2. mertebeden, lineer

b. 2. mertebeden, lineer değil

c. 1. mertebeden, lineer

d. 2. mertebeden, lineer değil

e. 2. mertebeden, lineer değil

f. 1. mertebeden, lineer

g. 2. mertebeden, lineer değil

h. 1. mertebeden, lineer

ı. 2. mertebeden, lineer değil

4. $y = \frac{5}{7} e^{4x} + \frac{2}{7} e^{-3x}$

5. $y = \sin x + \cos x$

BÖLÜM 2.

Sayfa 30.

1. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri, gerekiyorsa $M(x, y)\,dx + N(x, y)dy = 0$ şekline sokunuz, sonra tam diferansiyel olup olmadığına bakınız ve "tam diferansiyel denklem" olanlarını çözünüz.

a. Tam diferansiyeldir; $xy^2 - \frac{x^3}{3} = c$

b. Tam diferansiyeldir; $x^2y + 2y^2 = c$

c. Tam diferansiyel değil.

d. Tam diferansiyeldir; $(y^2 + 1)\sin x = c$

e. Tam diferansiyeldir; $ax^2 + 2bx + y + cy^2 = c$

f. Tam diferansiyeldir; $e^x \sin y + 2y \cos x = c$

g. Tam diferansiyeldir; $x^2 + 2xy - y^2 = c$

h. Tam diferansiyeldir; $y^2x - x^2y + 3x^2 + 2y = c$

ı. Tam diferansiyeldir; $x^2y - y^2 - x^2 = c$

j. Tam diferansiyel değil

k. Tam diferansiyeldir; $\cos y \cos x = c$

l. Tam diferansiyeldir; $x^3 e^{2y} + x^2 - \cos y = c$

m. Tam diferansiyeldir; $y \ln x + x \ln y = c$

n. Tam diferansiyel değildir.

o. Tam diferansiyel değildir.

p. Tam diferansiyel değildir.

2. $A = 1$, $\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = c$

3. a. $\phi(x, y) = -x^2y$

b. $\phi(x, y) = xy^4 - 2x^3y^2$

c. $\phi(x, y) = y / x$

4. b. $\mu = \exp(x^3)$; $xy \exp(x^3) + x^3 = c$

c. $\mu = x^3$; $x^6 - 6x^4y = c$

d. $\mu = x$; $x^3 + x^2y^2 = c$

e. $\mu = y^2$; $y^3 + x - \frac{y^6}{6} = c$

f. $\mu = 1/x^2$; $\frac{y}{x} + x^2 = c$

g. $\mu = 1/x^3$; $\frac{y}{x^3} + \ln x = c$

5. $\frac{du}{dx} = u^2 + 1$

Sayfa 40.

1. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri değişkenlerine ayırarak çözünüz.

   a. $1/y^2 = 2/x + c$

   b. $(1 + x^2) / (1 + y^2) = c$

   c. $y^2 = 2x^2 + 2$

   d. $(1 + x)(1 + y) = c$

   e. $y^2 + 2y + 4 = \exp\left(-\frac{2x^3}{3}\right) c$

   f. $x^2 + \ln(y^2 + 1)^2 = c$

   g. $\sin y = c \cos x$

   h. $x^x y^y = c$

   j. $y(y + 2) - x(x^2 - x - 1) = 3$

   k. $\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2y^2} = \frac{1}{2}$

   l. $(x - 1)^2 / (e^y + 4) = c$

   n. $xy = c$

2. Aşağıdaki homogen diferansiyel denklemleri çözünüz.

   a. $x^2 - 2xy = c$

   b. $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left[\frac{2\left(\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right] = \ln x + c$

   d. $y^2 = x^2(4x - 1)$

   e. $y^2 = x^2(cx^2 - 1)$

   f. $\ln\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 9\left(\frac{y}{x}\right) + 3\right] - \frac{18}{\sqrt{84}} \arctan\left[\frac{2\left(\frac{y}{x} + \frac{9}{2}\right)}{\sqrt{84}}\right] = \ln x + c$

g. $\ln\left[\left(\frac{y-2}{x+2}\right)^2+4\left(\frac{y-2}{x+2}\right)-4\left[\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\frac{(y-2)}{(x+2)}-\sqrt{5}}{\frac{(y-2)}{(x+2)}+\sqrt{5}}\right)\right]\right]=-\ln x+c$

i. $3(y+2)^2-2(y+2)(x+1)+3=0$

j. $\arctan\frac{y}{x}=x+c$

k. $(y/x)/\left[3\left(\frac{y}{x}\right)+2\right]=x.c$

l. $\tan\left(\frac{y}{x}\right)+\ln x=c$

m. $x/\cos y=c$

n. $e^{-x}(x+1)-e^{-y}=c$

o. $\ln(2x+3y-1)+2(2x+3y)=x+c$

Sayfa 55.

1. Aşağıda verilen diferansiyel denklemleri ve başlangıç değer problemlerini çözünüz.

a. $y=\frac{x^2}{3}+\frac{c}{x}$

b. $y=-x^2\cos x+cx^2$

c. $y=e^{-2x}(1+c.e^{-x})$

d. $y=e^{-2x}(10x+c)$

e. $y=\frac{3}{7}x^2+\frac{4}{7\sqrt[3]{x}}$

f. $y=x\ln x+cx$

g. $y=2x\ln x+cx$

h. $y=-\cos x+\frac{\sin x}{x+1}+\frac{c}{x+1}$

i. $y=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}$

j. $y=-\frac{\cos 2x}{x}+\frac{2(x\sin x+\cos x)}{x}+\frac{\pi-1}{x}$

k. $y = e^{2x} + e^{x} c$

l. $y = x^{6} + x^{-5} c$

m. $y = 1 + e^{\frac{1}{x}} . c$

n. $y = \frac{1}{4} + \left[3 - \frac{1}{\left(x^{2} + 2 \right) c} \right]$

o. $y = 1 + c . \exp(-e^{x})$

p. $y = -\frac{1}{3} (\cos 2x + \sin 2x) + e^{x} . \frac{1}{3}$

q. $y = -\frac{1}{3} x^{2} . \cos 3x + cx^{2}$

2. Aşağıdaki Bernoulli diferansiyel denklemlerini çözünüz.

a. $y = 1 / (1 - x + ce^{-x})$

b. $y = \left[1 - x^{2} / (cx^{2}) \right]^{1/2}$

c. $y = \left(\frac{1}{2} + c \frac{1}{x^{2}} e^{-2x} \right)^{1/2}$

d. $1/x = (y^{6} / 5) + (c/y)$

e. $1/y = (x^{2} - x + 2e^{x}) + ce^{-x}$

g. $1/y^{3} = -\frac{1}{4} x^{2} + \frac{5}{4} x^{2}$

h. $e^{2x} / y^{2} = x^{2} + c$

ı. $1/y^{2} = \frac{6}{x} + ce^{-x} / x$

j. $y^{1/3} / x^{3} = -\frac{3}{2} \left(1 / y^{2/3} \right) + c$

l. $1/y = -1/2 + c/x$

m. $1/y = -\ln x - 1 + c/x$

n. $\sin y - 2 = \exp(x^{2}) . c$

o. $yx = y^{2} + \ln y + c$

3. Aşağıda verilen denklemler Riccati ve Clairaut diferansiyel denklemleridir. Bu denklemleri çözünüz.

a. $\frac{1}{y - x} = \exp\left(\frac{x^{2}}{2} \right) + x + c$

b. $\frac{1}{y - x} = 2 + \exp\left(-2x^{2} \right) . c$

c. $y = -x + \dfrac{x\, e^{-\frac{2}{5}x^5}}{c + \frac{1}{2}\, e^{-\frac{2}{5}x^5}}$

d. $y = -\dfrac{2}{9}\sqrt{3}\,(-x)^{3/2}$

$y = \dfrac{2}{9}\sqrt{3}\,(-x)^{3/2}$

$y = c^3 + xc$

e. $x = \dfrac{1}{2}\dfrac{c\sqrt{8}\, x\, 2^{3/4}}{\left(-4y + x^2\sqrt{x^4 + 8y - x^4}\right)^{1/4}}$

f. $x = \dfrac{1}{16}\dfrac{c\, x\, 16^{3/4}\left(-8y + x^2\sqrt{x^4 + 16y} - x^4\right)^{1/4} \cdot 2^{1/4}}{\sqrt{y}}$

$x = \dfrac{1}{2}\dfrac{c\, 16^{1/4}\, x\, 2^{3/4}}{\left(-8y + x^2\sqrt{x^4 + 16y} - x^4\right)^{1/4}}$

g. $y = \dfrac{5}{4}x^2$

$y = -\dfrac{1}{5}c^2 + xc$

BÖLÜM 3.

Sayfa 63.

Aşağıda verilen denklemler bir parametreli eğri ailelerini göstermektedir. Bu eğri ailelerinin herbiri için dik yörünge eğrilerini veren diferansiyel denklemleri bulunuz ve eğrilerin grafiklerini çiziniz.

1. $dx - 2\,dy = 0$
2. $2yy' + 2x = 0$
3. $2yy' + x = 0$
4. $dy + dx = 2\dfrac{x - y}{x}\,dy$
5. $2x - (x^2 + 4y)/x - 4/y' = 0$
6. $xdy + ydx = 0$
7. $xyy' - (1 - x^2) = 0$
8. $2x + \dfrac{2y}{y'} = \dfrac{x^2 - y^2}{x}$
9. $(x - a)^2 + y^2 = c$
11. $y = x^3 + 1$
12. $A = \dfrac{1}{4}$ olmalıdır.
12. $dy - 2axdx = 0$
14. $(x - a)\,dx + y\,dy = 0$

BÖLÜM 4.

Sayfa 113.

1. Aşağıda verilen diferansiyel denklemleri ve başlangıç-değer problemlerini "Belirsiz Katsayılar Metodu" ile çözünüz.

a. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{5}e^x$

c. $y = (c_1 + c_2x)e^x + \dfrac{x^3 e^x}{6} + 4$

d. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{10} \cos x$

e. $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + 2 + \dfrac{x}{4} \sin 2x$

f. $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + 6 - 2 \cos 2x$

h. $y = e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x) + 2 \sin 2x - \cos x$

j. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} \dfrac{16}{25} \cos 2x + 3 \sin 2x$

m. $y = e^{2x}\left(c_1 e^{\sqrt{3}x} + c_2 e^{-\sqrt{3}x}\right) - \frac{2}{3}e^{2x} - \frac{1}{4}\sin x$

r. $y(x) = e^{-2x}\left(\frac{51}{45}\cos 3x - \frac{125}{45}\sin 3x\right) - \frac{6}{45}\cos 3x - \frac{12}{45}\sin 3x$

t. $y(x) = \frac{1}{20}\sin 4x - \frac{1}{5}\sin x$

2. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerde belirsiz katsayıları bulmaksızın ve genel çözüme gitmeksizin yalnız her denklem için y_p 'yi yazınız.

Her denklemin sağ yanı f(x) olmak üzere;

a. $y_p = \frac{1}{D^2 + 6D + 13} \cdot f(x)$

b. $y_p = \frac{1}{D^{iv} - 16} \cdot f(x)$

c. $y_p = \frac{1}{D^2 + 4} \cdot f(x)$

d. $y_p = \frac{1}{D\left(D^2 + 1\right)} \cdot f(x)$

e. $y_p = \frac{1}{D^2 + 1} \cdot f(x)$

f. $y_p = \frac{1}{D^4 + D^2} \cdot f(x)$

g. $y_p = \frac{1}{D^2 + 4} \cdot f(x)$

h. $y_p = \frac{1}{D^2 + 4D} \cdot f(x)$

ı. $y_p = \frac{1}{D^2 + 4} \cdot f(x)$

j. $y_p = \frac{1}{D^2 - 4D} \cdot f(x)$

k. $y_p = \frac{1}{D^2 + 1} \cdot f(x)$

l. $y_p = \frac{1}{D^2 + 9} \cdot f(x)$

Sayfa 128.

1. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri "Parametrelerin Değişimi Metodunu" kullanarak çözünüz.

a. $y = \sin x \ln(\sin x) - \sin x \ln(\cos x + 1) + c_1 \sin x + c_2 \cos x$

b. $y = \frac{1}{16} x^3 e^{-3x} + \frac{3}{32} x^2 e^{-3x} + \frac{9}{128} x e^{-3x} + \frac{3}{128} e^{-3x} + c_1 e^x + c_2 e^x$

c. $y = \frac{1}{2} \cos x + c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x$

d. $y = e^{-x} \arctan e^x - \frac{1}{2} \ln\left(1 + e^{2x}\right) e^{-2x} + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

e. $y = -e^x - e^x . x + c_1 e^{2x} + c_2 e^x$

f. $y = -\frac{1}{2} x^2 - 1 + c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x$

g. $y = -e^{-2x} \ln x - e^{-2x} + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x} . x$

h. $y = \sin x + c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + c_3 e^x x$

i. $y = -\ln(\cos x) + 1 - \sin x \ln(1 + \sin x) + \sin x \ln(\cos x)$
$+ c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x$

j. $y = -1 - e^x x + e^x \ln(1 + e^x) - \ln(1 + e^x) e^{-x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

k. $y = \frac{1}{2} \sin \ln(\sin x) - \frac{1}{2} \sin x \ln(\cos x + 1) - \frac{1}{2} \cos x .$
$\ln(1 + \sin x) + \frac{1}{2} \cos x \ln \cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$

l. $y = \frac{1}{2} e^x . x - \frac{1}{4} e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

m. $y = -\frac{1}{8} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{32} e^{-2x} + c_1 e^{2(\sqrt{2}-1)x} + c_2 e^{-2(\sqrt{2}+1)x}$

2. Aşağıdaki denklemlerin herbirinde, homogen kısmın lineer bağımsız çözümleri verilmiştir. Denklemin genel çözümünü bulunuz.

a. $y = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + c_1x^2 - c_1 + c_2x$

b. $y = \frac{2}{3}e^x \ln x . x^3 - \frac{8}{9}e^x x^3 + c_1e^x + \frac{1}{2}c_2e^x x^2$

c. $y = -\frac{1}{9}e^x x^3 + \frac{1}{3}x^3 \ln x + c_1e^x + \frac{1}{3}c_2e^x x^3$

3. Aşağıda verilen denklemde, $y(x) = x$ bir özel çözümdür. Denklemi çözünüz.

$y = c_1\sqrt{-1 + x^2} + c_2x$

4. Aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

a. $y = e^x x^3 - 3e^x x^2 + c_1e^x - c_2x^2$

b. $\frac{1}{6}\frac{4^3 + 3x^2 + 6c_1x^2 + 6c_1x + 6c_2}{x + 1}$

Sayfa 138.

1. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri "Operatör Metodu"nu kullanarak çözünüz.

a. $y = -\frac{1}{16}e^{-2x} - \frac{1}{4}x^{-2x} + c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

b. $y = -\cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$

c. $y = -x^3 - 24x + c_1e^{\frac{1}{2}x} + c_2e^{-\frac{1}{2}x}$

d. $y = -\frac{1}{36}e^{-2x} + c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x + c_5e^x x^2$

e. $y = \frac{1}{3}\sin 2x . \cos x^2 . \sin x + \frac{1}{6}\sin 2x \sin x + \frac{1}{3}\cos x^3 \cos 2x +$

$c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

f. $y = -\frac{1}{2}\sin 2x \cos x^4 + \frac{1}{2}\sin 2x \cos x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x \sin x \cos x^3$

$-\frac{1}{4}\sin x \cos x \cos 2x - x\frac{1}{4}\cos 2x + c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

g. $y = \frac{3}{4}e^{2x}x - \frac{4}{3}e^{-x} - \frac{3}{16}e^{2x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

h. $y = \frac{1}{12}x^2 e^{3x} - \frac{1}{12}e^{3x}.x + \frac{1}{36}e^{3x} + c_1 \sin\sqrt{3}x + c_2 \cos\sqrt{3}x$

i. $y = \frac{1}{20}.\sin x.\cos 3x.e^x.x + \frac{1}{25}\sin x \cos 3x.e^x + \frac{3}{20}\sin x.\sin 3x e^x.x$

$-\frac{3}{100}\sin x \sin 3x.e^x + \frac{1}{2}\sin x.x.e^x.\cos x + \frac{1}{4}x e^x - \frac{1}{2}x e^x \cos x^2$

$-\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}\cos x^2.e^x + \frac{3}{20}\cos x \cos 3x e^x x - \frac{3}{100}\cos x \cos 3x e^x$

$-\frac{1}{20}\cos x \sin 3x e^x x - \frac{1}{25}\cos x \sin 3x e^x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$

j. $y = \frac{1}{60}x^5 e^{-x} + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$

k. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + c_1 e^{2x} + c_2 e^x$

l. $y = \frac{1}{3}\cos x^2 - \frac{2}{3} + c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x$

m. $y = -\frac{1}{2}e^{-x} + c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$

n. $y = -\frac{1}{2}e^x.x - \frac{1}{3} - \frac{1}{12}e^x + c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$

o. $y = 1 + c_1 e^x + c_2 x e^x$

Sayfa 145.

1. Aşağıda verilen Cauchy Euler diferansiyel denklemlerini çözünüz.

a. $y = \frac{1}{4}\frac{2\ln x.x^2 - 3x^2 + 4c_1 x + 4c_2}{x^2}$

b. $y = -2\dfrac{-1 + 2c_1x^2 + 2c_2x^{\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{7}\right)} + 2c_3x^{\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{7}\right)}}{\left(5+\sqrt{3}\sqrt{7}\right)\left(-5+\sqrt{3}\sqrt{7}\right)}$

c. $y = \frac{1}{3}x^2 - c_1\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln x\right) + c_2\sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln x\right)$

d. $y = c_1x + c_2x^3$

e. $y = \dfrac{c_1 + c_2x^5 + c_3x^5\ln x}{x^2}$

f. $y = \frac{1}{2}\dfrac{-x^2 + 2c_1 + 2c_2x^3}{x}$

g. $y = \frac{1}{16}\dfrac{x^4 + 4\ln x^2 . x^2 - 8\ln x . x^2 + 6x^2 + 16c_1 + 16c_2\ln x}{x^2}$

h. $y = \frac{1}{4}\dfrac{-3x^2 - 4x\ln x + 2\ln x . x^2 + 4c_1x + 4c_2 + 4c_3x^3}{x}$

2. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a. $y = \frac{1}{15}(72x^3 + 384x^2 - 144x - 837 - 360\ln(2x+3).x^2 - 1080$

$\ln(2x+3)x - 810\ln(2x+3) + 20c_1x^2 + 60c_1x + 45c_1 + 15c_2\sqrt{2x+3}\Big/$

$(2x+3)$

b. $y = c_1\ln(x+2).x + c_2x + 2c_2 + 4 + 2c_1\ln(x+2)$

c. $y = \frac{1}{4}\dfrac{c_1x^4 + 8c_1x^3 + 24c_1x^2 + 32c_1x + 16c_1 + 4c_2}{x+2}$

d. $y = \dfrac{3 + x^72}{x^2}$

e. $y = \frac{1}{36}\,\frac{-6\ln x \cdot x^2 + x^2 + 36c_1 + 36x^5 c_2}{x^2}$

f. $y = \frac{1}{60}\,\frac{12x^5 - 60x^4 \ln x - 40x^3 + 15x^4 + 60c_1 x^4 + 60c_2}{x^3}$

BÖLÜM 7.

Sayfa 260

Aşağıda verilen lineer denklem sistemlerini çözünüz.

1. $x(t) = \dfrac{-t + c_1 e^{(\sqrt{2}-1)t} + c_2 e^{-(\sqrt{2}+1)t}}{(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}+1)^2}$

$y(t) = \dfrac{1 + c_1 e^{(\sqrt{2}-1)t}\sqrt{2} - c_2 e^{-(\sqrt{2}-1)t}\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

2. $x(t) = \frac{4}{9}e^t - t + e^{-\frac{1}{2}t}c_2 - \frac{8}{5}c_1 e^{-2t}$

$y(t) = t - \frac{1}{9}e^t - e^{-\frac{1}{2}t}c_2 + c_1 e^{-2t}$

3. $x(t) = -\frac{1}{2}\sin t - 3c_1 e^t$

$y(t) = \sin t + c_1 e^t$

4. $x(t) = -t - \frac{5}{2}c_2 \sin t + \frac{5}{2}c_1 \cos t - 2c_4 \sin 2t + 2c_3 \cos 2t$

$y(t) = 1 + c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 \sin 2t + c_4 \cos 2t$

5. $x(t) = e^t + 15 - 3t + c_2 e^{-\frac{5}{21}t}\sin\left(\frac{1}{21}\sqrt{59}t\right) + \left(-\frac{1}{5}c_2\sqrt{59} + \frac{42}{5}c_1\right)e^{-\frac{5}{21}t}$
$\cdot \cos\left(\frac{1}{21}\sqrt{59}t\right)$

$y(t) = \frac{1}{7}e^t - t + \frac{5}{2} + \left(\frac{2}{5}c_2 - \frac{1}{5}\sqrt{59}c_1\right)e^{-\frac{5}{21}t} \cdot \sin\left(\frac{1}{21}\sqrt{59}t\right) + c_1 e^{-\frac{5}{21}t}$
$\cdot \cos\left(\frac{1}{21}\sqrt{59}t\right)$

6. $x(t) = \frac{1}{2}e^t + c_1 \sin t + c_2 \cos t$

$y(t) = 2e^t + (-3c_1 + c_2)\sin t + (-3c_2 - c_1)\cos t$

7. $y(t) = \left\{\left[-48 + 48\left(\frac{1}{4}\sqrt{19}\sqrt{3} + \frac{5}{4}c_2\right)e^{\frac{1}{6}(-3+\sqrt{19}\sqrt{3})t} + 48\, e^{-\frac{1}{6}(3+\sqrt{19}\sqrt{3})t} \cdot c_1\right]\right\}$

$\Big/ \left(-3 + \sqrt{19}\sqrt{3}\right)\left(3 + \sqrt{19}\sqrt{3}\right)$

$z(t) = \left\{\left[24 + 24\left(-3c_2 - \frac{1}{3}c_2\sqrt{19}\sqrt{3}\right)e^{\frac{1}{6}(-3+\sqrt{19}\sqrt{3})t}\right.\right.$

$\left.\left. + 24\left(-\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{6}\sqrt{19}\sqrt{3}\right)e^{-\frac{1}{6}(3+\sqrt{19}\sqrt{3})t}\right] \Big/ \left[\left(3 + \sqrt{19}\sqrt{3}\right)\left(-3 + \sqrt{19}\sqrt{3}\right)\right]\right.$

$x(t) = \left\{12 + 48\, e^{\frac{1}{6}(-3+\sqrt{49}\sqrt{3})t}\, c_2 + 12\left(-\frac{5}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_1\sqrt{19}\sqrt{3}\right) \cdot e^{-\frac{1}{6}(3+\sqrt{49}\sqrt{3})t}\right\} \Big/$

$\left(3 + \sqrt{19}\sqrt{3}\right)\left(-3 + \sqrt{19}\sqrt{3}\right)$

8. $x(t) = \frac{3}{4}te^t + \left(-3c_1 + \frac{1}{2}\right)e^t - 3c_2 e^{-t} + \sin t\, c_3 + \cos t\, c_4$

$y(t) = -\frac{1}{4}te^t + \frac{3}{8}e^t + c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \sin t\, c_3 - \cos t\, c_4$

9. $x(t) = e^t c_2 + c_3 e^{-4t} + \frac{7}{3}e^{-2t}c_1$

$y(t) = c_3 e^{-4t} + e^{-2t}c_1$

10. $z(t) = c_3 + c_4 e^t \sin\sqrt{3}\,t + \left(\frac{13}{3}c_2\sqrt{3} + 2c_4\sqrt{3}\right) \cdot e^t \cos\sqrt{3}\,t$

$y(t) = -c_3 + c_2 e^t \sin\sqrt{3}\,t + \left(-c_4\sqrt{3} - 2c_2\sqrt{3}\right)e^t \cdot \cos\sqrt{3}\,t$

$y(t) = c_1 e^t + \left(-6c_2 - 2c_4\right)e^t \sin\sqrt{3}\,t + \left(\frac{10}{3}c_2\sqrt{3} + 2c_4\sqrt{3}\right)e^t \cos\sqrt{3}\,t$

BÖLÜM 7.

Sayfa 288

Aşağıda verilen "normal form" lineer diferansiyel denklem sistemlerini çözünüz.

1. $x(t) = c_1 e^t . \sin t + c_1 e^t \cos t$

$y(t) = (2c_1 - c_2) e^t \sin t + (c_1 + 2c_2) e^t \cos t$

2. $x(t) = 2c_1 e^{10t} - \frac{3}{2} c_2 e^{3t}$

$y(t) = c_1 e^{10t} + c_2 e^{3t}$

3. $x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{3t}$

$y(t) = c_1 e^{5t} + 3c_2 e^{3t}$

4. $x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t}$

$y(t) = c_1 e^{4t} + 3c_2 e^{2t}$

5. $x(t) = c_1 e^{2t} \sin 3t + c_2 e^{2t} \cos 3t$

$y(t) = 3c_2 e^{2t} \sin 3t - 3c_1 e^{2t} \cos 3t$

6. $x(t) = c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-3t} - e^{-t} c_3$

$y(t) = -c_1 e^{2t} - \frac{3}{2} e^{-t} c_3$

$z(t) = c_2 e^{-3t} + e^{-t} c_3$

7. $x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-3t}$

$y(t) = c_1 e^{5t} - 3c_2 e^{-3t}$

8. $x(t) = (c_2 - 2c_1) e^{3t} \sin 2t + c_2 e^{3t} \cos 2t$

$y(t) = (c_2 - c_1) e^{3t} \sin 2t + c_1 e^{3t} \cos 2t$

9. $x(t) = c_2 e^{5t} + (4c_1 + 2c_2) e^{5t} . t$

$y(t) = c_1 e^{5t} + (-2c_1 - c_2) e^{5t} . t$

10. $x(t) = (2c_2 - 5c_1)\, e^{4t} \sin t + c_2\, e^{4t} \cos t$

$y(t) = (c_2 - 2c_1)\, e^{4t} \sin t + c_1\, e^{4t} \cos t$

11. $x(t) = (5c_1 - 3c_2) \sin t + c_2 \cos 3t$

$y(t) = c_1 \sin 3t + (-3c_1 + 2c_2) \cos 3t$

12. $x(t) = c_1\, e^{t} + c_2\, e^{-t}$

$y(t) = c_1\, e^{t} + 3c_2\, e^{-t}$

13. $x(t) = c_2 e^{5t} - 3c_1 e^{t}$

$y(t) = c_2 e^{5t} + c_1 e^{t}$

14. $x(t) = c_2 e^{5t} - c_1\, 4e^{-5t}$

$y(t) = c_2 e^{5t} + c_1 e^{-5t}$

15. $x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-t}$

$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t} - c_3 e^{-t}$

$z(t) = 2c_1 e^{t} - e^{-2t}\, c_2$

16. $x(t) = -c_2 e^{t} + c_1 e^{3t} - c_3 e^{-2t}$

$y(t) = c_2\, 4e^{t} + 2c_1 e^{3t} + c_3 e^{-2t}$

$z(t) = c_2 e^{t} + c_1 e^{3t} + c_3 e^{-2t}$

Sayfa 338

Aşağıda verilen birinci mertebeden homogen ve lineer diferansiyel denklem sistemlerini çözünüz.

$x = (x_1, x_2)$ olarak alınmıştır.

1. $x_1 = 7c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}$

$x_2 = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}$

2. $x_1 = \frac{1}{3} c_2 e^{3t} + \left(-\frac{3}{4} c_1 + \frac{1}{4} c_1 \sqrt{5}\right) e^{\sqrt{5}t} - c_3 e^{-\sqrt{5}t}$

$x_2 = \frac{10}{3} c_2 e^{3t} + c_1 e^{\sqrt{5}t} + \left(3c_3 - c_3\sqrt{5}\right) e^{-\sqrt{5}t}$

$x_3 = c_2 e^{3t} + \left(\frac{3}{4} c_1 - \frac{1}{4} c_1 \sqrt{5}\right) e^{\sqrt{5}t} + c_3 e^{-\sqrt{5}t}$

3. $x_1 = \frac{9}{5} c_1 e^{t}$

$x_2 = c_1 e^{t} + c_2 e^{(3+\sqrt{13})t} + c_3 e^{-(-3+\sqrt{13})t}$

$x_3 = \frac{12}{5} c_1 e^{t} + \left(4 c_2 - c_2 \sqrt{13}\right) e^{(3+\sqrt{13})t} + \left(4 c_3 + c_3 \sqrt{13}\right) e^{-(-3+\sqrt{13})t}$

4. $x_1 = c_1 e^{5t} - c_2 3e^{t}$

$x_2 = c_1 e^{5t} + c_2 e^{t}$

5. $x_1 = (2c_1 - c_2) \sin t + (c_1 + 2c_2) \cos t$

$x_2 = c_1 \sin t + c_2 \cos t$

6. $x_1 = -2c_2 e^{-t} \sin 2t + 2c_1 e^{-t} \cos 2t$

$x_2 = c_1 e^{-t} \sin 2t + c_2 e^{-t} \cos 2t$

7. $x_1 = \left(\frac{1}{3} c_1 + \frac{1}{3} c_1 \sqrt{5}\right) e^{(1+\sqrt{5})t} + \left(c_3 \sqrt{5} + 3c_3\right) e^{-(-1+\sqrt{5})t}$

$x_2 = c_2 + \left(\frac{1}{3} c_1 \sqrt{5} + \frac{2}{3} c_1\right) e^{(1+\sqrt{5})t} + c_3 e^{-(-1+\sqrt{5})t}$

$x_3 = -c_2 + c_1 e^{(1+\sqrt{5})t} + \left(-6 c_3 - 3 c_3 \sqrt{5}\right) e^{-(-1+\sqrt{5})t}$

8. $x_1 = \left(-8 c_2 - c_1 \sqrt{79}\right) e^{-\frac{3}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{79}\, t\right) + c_1 e^{-\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{79}\, t\right)$

$x_2 = c_2 e^{-\frac{3}{2}t} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{79}\, t\right) + \left(-c_2 \sqrt{79} - 10 c_1\right) e^{-\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{79}\, t\right)$

9. $x_1 = -5e^{-2t} \sin t + e^{-2t} \cos t$

$x_2 = -3e^{-2t} \sin t - 2e^{-2t} \cos t$

10. $x_1 = -3e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t$

$x_2 = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t$

BÖLÜM 8.

Sayfa 379.

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

1. $y(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-t} - e^{t}\cos t + 7e^{t}\sin t\right)$

2. $y(t) = e^{2t}$

3. $y(t) = \frac{8}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t}$

4. $y(t) = \frac{1}{8}(\sin t - \cos t) + \frac{e^{-2t}}{8}(\sin t + \cos t)$

5. $y(t) = -\frac{1}{3} + \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}$

6. $y(t) = \frac{1}{3}\left(te^{t} + \frac{2}{3}e^{t} - \frac{2}{3}e^{-2t}\right)$

7. $y(t) = -e^{-2t} + 2e^{-t} - 2te^{-t} - \cos t + \sin t$

8. $y(t) = e^{-t}(2\cos 2t + \sin 2t)$

9. $y(t) = \frac{1}{12}e^{5t} + \frac{1}{4}e^{t} + \frac{2}{3}e^{2t}$

10. $y(t) = \frac{k}{m^2 - n^2}(\cos nt - \cos m t)$

11. $y(t) = \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t$

1. Shepley L. Ross, **Differential Equantions,** John Wiley & Sons, Inc., 1974

2. Paul D. Ritger and Nicholas J. Rose, **Differential Equantions with Applications,** Mc Graw-Hill Book Company, 1968.

3. William E. Boyce and Richard C. Diprima, **Elemantary Differential Equations and Boundary Value Problems,** John Wiley & Sons., 1977.

4. Ross L. Finney and Donald R. Ostberg, **Elemantary Differential** 1968 **Equations with Linear Algebra,** Addison-Wesley Publishing Company.

5. Wilfred Kaplan, **Ordinary Differential Equations,** Addison-Wesley Publishing Company, 1958.

6. Earl A. Coddington, **An Introduction to Ordinary Differential Equations,** Prentice-Hall, Inc., 1961.

7. Frank Chorlton, **Ordinary Differential and Difference Equations,** Van Nostrand, 1965.

8. Coddington and Levinson, **Theory of Ordinary Differential Equations,** Mc Graw-Hill Book Company.

9. Dennemeyer, **Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems,** Mc Graw-Hill Book Company, 1968.

10. Lester R. Ford, **Differential Equations,** Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1955.

11. Murray R. Spiegel, **Applied Differential Equations,** Prentice Hall. 1967.

12. Ruel V. Churchill, **Fourier Series and Boundary Value Problems,** Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1941.

13. A.G. Webster, **Partial Differential Equations of Mathematical Physics,** Hafner Publishing Company., 1950.

14. F.B. Hildebrand, **Advanced Calculus for Applications,** Prentice Hall, 1976.

15. C.G. Lambe, C.J. Tranter, **Differential Equations of Engineers and Scientists,** The English University Press, 1961, London.

INDEKS

Adi nokta, 190
Adi nokta etrafında çözüm, 190
Ağırlık fonksiyonu, 394
Ağırlıklı matris, 305
Analitik fonksiyon, 189
Atış yöntemi, 481
Augmented matris, 305

Basit harmonik hareket, 154. 155
Başlangıç şartları, 402
Başlangıç değer problemi, 457
Belirsiz katsayılar metodu, 112, 120, 123
Bernoulli denklemi, 49
Bessel dif. denk., 229
Bessel fonksiyonu, 231
  sıfırıncı mertebeden birinci tür, 229
  sıfırıncı mertebeden ikinci tür, 234
  değişik mertebeden, 241
Bessel denklemine indirgenebilir, 243
Birim fonksiyon, 419
Birim matris, 301
Birleşik cisimlerde sıcaklık dağılımı, 526

Clairaut denklemi, 54
Cauchy-Euler denk., 146, 151, 152
Çözüm eğrisi, 6
Çözüm yöntemi
  iki noktalı, 490

Dalga denklemi,
  bir boyutlu, 500
  iki boyutlu, 507
Daralma dönüşümü, 7
Diferansiyel denklemler, 1
  adi, 2
  kısmi, 2, 496
  tam, 17
birinci mertebeden lineer, 42
sabit katsayılı ikinci mertebeden lineer, 154
homogen, 34
sabit katsayılı homogen, 106
sabit katsayılı homogen olmayan, 112
değişken katsayılı homogen olmayan, 91
değişken katsayılı homogen, 91
Dif. denk. çözümü, 3
Dif. denklem sistemleri, 255
  normal form, 256
  lineer, 255, 267
Dik yörüngeler, 58

Eigen değer, 315, 383
Elektrik devre problemleri, 85, 169
Euler yöntemi, 461
Euler yönteminde kesim hatası, 463
Euler formülü, 109

Frobenius metodu, 206, 228
Fourier katsayıları, 428
Fourier serisi açılımı, 428, 438, 455
  trigonometrik fourier serisi, 435
Fourier transformasyon tablosu, 401

Gamma fonksiyonları, 235, 363
Genel çözüm, 16, 104

Hata fonksiyonu, 355
Hata fonksiyonu nümerik değerleri, 356
Homogen lineer sistemler, 277, 325
  sabit katsayılı, 279
Homogen olmayan lineer sistemler, 278, 325

Iraksak, 184

Isı denklemi,
bir boyutlu, 512
iki boyutlu, 517
İntegrasyon sabiti, 11
İntegrasyon çarpanı, 23
İki noktalı kapalı çözüm yöntemi, 490
İki boyutlu dalga denklemi, 507

Karakteristik denklem, 115
Kare matris, 297
Karakteristik kökler,
reel ve biribirinden farklı, 280
reel ve biribirine eşit, 286
eşlenik, sanal, 292
Karakteristik değerler, 314, 330, 406
Karakteristik fonksiyonlar, 314, 406, 408
Karakteristik vektörler, 331
Kısmi dif. denklemler, 496
çözümü, 498
değişkenlerine ayırma yöntemi, 499, 502
Konvalisyon özellikleri, 370
Kuvvet serileri cinsinden çözüm, 182, 188
Kuvvet serilerinin yakınsaklığı, 184
Kirchoff kanunu, 169

Lagrange metodu, 123
Laplace dönüşümü, 347, 351
temel özellikleri, 357
metodu, 519
ters özellikleri, 368, 370
basit kesirlere ayırma, 373
Laplace dönüşümü ile çözüm, 380
Lineer dif. denklemler
laplace çözümü, 380
matris metodu, 324
Lineer kombinasyon, 101
Lineer bağımlı fonksiyonlar, 102
Lineer bağımsız fonksiyonlar, 102
Lineer bağımlılık, 306
Lineer bağımsızlık, 306
Laplace transformasyon tab., 350, 351, 388
Legendre denklemi, 245
Legendre polinomları, 245, 248

Matris, 296
birim, 301
ters, 302
sıfır, 302
Matris yöntemleri, 479
Mertebe, 2
Membran,
dikdörtgen şeklinde, 508
dairesel, 509
Mekanik problemler, 64
Mekanik - mukavemet problemleri, 176
Mutlak yakınsaklık
oranı testi, 186

Normal form, 256
Normal form lineer sistemler, 276
Normalize fonksiyon, 420

Operatör metodu, 257, 112, 137, 145
Olmayana ergi yöntemi, 8
Ortogonal fonksiyonlar, 418
Ortogonal sistem, 420
Ortogonal set, 420
Ortanormal set, 420
Ortonormal fonksiyonlar
seriye açılımı, 427
Özdeğer, 319

Picard teoremi, 9
Parametrelerin değişimi met., 112, 122, 123

Rekürans formülü, 193

Rezonans frekans, 163
Riccati denklemi, 53
Runge-Kutta yöntemi, 472
  kesim hatası, 474

Salınım hareketi, 154
Serbest sönümlü titreşim hareketi, 157
  zorlanmış sönümlü titreşim, 161
Sabit nokta teoremi, 7
Sabitlerin elimine edilmesi, 12
sayısal yöntemlerde kararlılık, 485
sınır değer problemleri, 457, 479
Stiff dif. denklemler, 485
Sturm - Liouville problemi, 406
singüler nokta, 190

Tam diferansiyel, 17
Taylor serisi, 189
Tek çözüm teoremi, 9
Temel teorem, 100
Tekil nokta, 190
Tekil nokta etrafında çözüm, 206
Telgraf denklemi, 523

UC - fonksiyonları, 112

Vektörler, 296
Varlık ve teklik teoremleri, 7

Yakınsaklık, 184
Yakınsaklık Yarıçapı, 184

Wronskian, 102, 329

GENEL DAĞITIM

BARIŞ YAYINLARI
FAKÜLTELER KİTABEVİ

Hürriyet caddesi No: 203/A Bornova - İZMİR
Tel: 0.232. 339 77 48 Faks: 0.232. 339 77 48 Gsm: 0.532.363 12 92
www.barisyayinlari.com info@barisyayinlari.com

ISB 978-975-6751-14-5
9 789756 751145

THG
0710284
PRA